JOURNAL OF NUMBER THEORY **64**, 291–338 (1997)
ARTICLE NO. NT972130

Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques

Patrice Philippon

UMR 9994 du CNRS–Problèmes Diophantiens, Université P. et M. Curie, T. 46–56, 5ème étage, case 247, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received December 7, 1995; revised November 30, 1996

We describe here the state of the art in transcendence methods, proving in an abstract setting two general theorems which can be used as an "algorithm" to establish transcendence of values of analytic functions. Combining these theorems with effective zero estimates gives measures of approximation and, using further approximation properties, lead to algebraic independence results (presently up to transcendence degree 3 or even 4, depending on the situation). In a second part we give several examples of application of the method to known, new, and (hopefully) future results. This includes transcendence properties of the invariant modular function and of Mahler type functions, algebraic independence of values of Eisenstein series, algebraic independence of values of exponentials of Drinfeld modules, and a strategy to tackle the Gelfond–Schneider conjecture.

1. INTRODUCTION

Les démonstrations de transcendance et d'indépendance algébrique obtenues par les méthodes d'approximation diophantienne présentent de nombreux points communs. Une première phase (généralement non publiée) consiste d'une part à faire un bilan des paramètres en présence et des inégalités qu'ils doivent satisfaire et d'autre part à optimiser (par tâtonnements) une fonction de ces paramètres sur un domaine prescrit. Cette phase achevée, on sait si on pourra ou non établir le résultat souhaité... mais il reste à écrite la preuve (dans une deuxième phase publiée!). Partant de ce constat, nous essayons (*voir* [14] pour une première tentative) de regrouper dans un énoncé général la plupart des situations faisant intervenir des valeurs de fonctions analytiques d'une variable justiciables de ce traitement. L'utilisation de cet énoncé limite ainsi la démarche à la recherche des paramètres et l'optimisation (première phase mentionnée ci-dessus). Il énumère tous les paramètres susceptibles d'être pris en compte (en l'état actuel de la théorie) et les contraintes à optimiser. On

0022-314X/97 $25.00

utilise cet énoncé en raisonnant par l'absurde, partant d'une hypothèse d'approximation (dont la négation est le résultat cherché) on détermine les paramètres optimaux. Si ceux-ci satisfont la condition du théorème on obtient une conclusion (estimation des zéros des fonctions considérées) à contredire dans chaque cas particulier, pour ce faire on dispose d'une alternative: une estimation asymptotique ou un lemme de zéros effectif. En particulier, on déduit du Théorème 1 du Paragraphe 2.b une méthode algorithmique, certes plus théorique que pratique, pour optimiser les paramètres (*voir* Paragraphe 2.c). Idéalement, on voudrait qu'un tel algorithme permette de déterminer sûrement si la théorie peut on non répondre à un problème de transcendance donné. En effet, il n'existe actuellement aucun moyen d'affirmer qu'un tel problème (par exemple le problème des quatre exponentielles) ne peut être résolu par le Théorème 1 déjà mentionné (bien que ce soit très probable et généralement admis pour l'exemple cité).

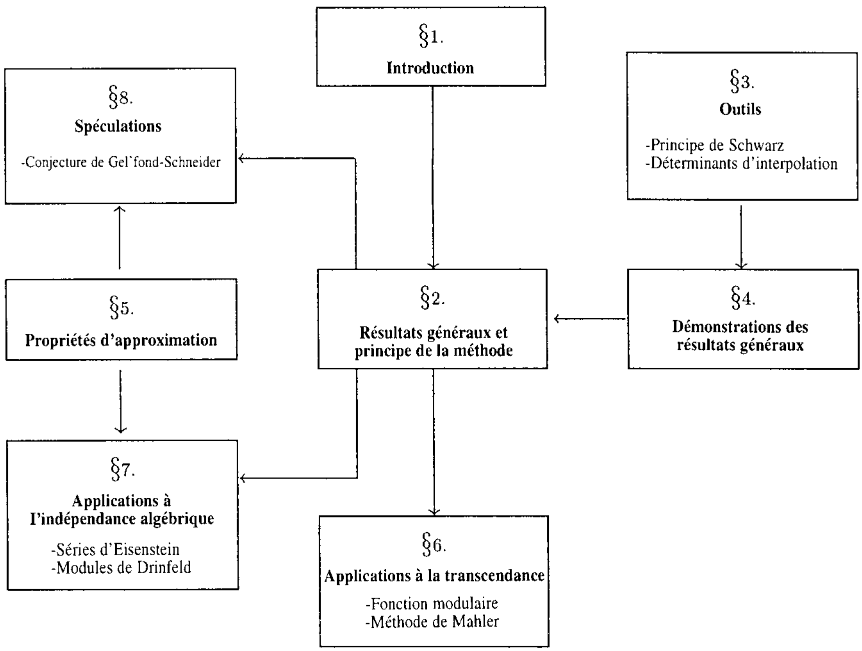
Nos théorèmes (*voir* Paragraphe 2.b) raffinent celui pour la transcendance de [14]. Les améliorations sont de deux natures: d'une part, on autorise l'anneau contenant les valeurs considérées à varier et d'autre part, on autorise les valeurs à être proches d'éléments de cet anneau sans y appartenir nécessairement. On met également en oeuvre deux aspects bien distincts de la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent [10] (*voir* aussi [23]). Notons au passage que c'est la simplicité des estimations qu'apporte cette méthode par rapport aux constructions de fonctions auxiliaires antérieures, qui permet d'écrire des énoncés généraux utilisables. Bien que le Théorème 1 du Paragraphe 2.b fasse intervenir des fonctions analytiques de plusieurs variables, il ne traite réellement que des situations produits à partir d'une variable. La difficulté pour l'étendre en plusieurs variables tient pour l'essentiel dans le principe de Schwarz (*cf.* Paragraphe 3.a). Le Théorème 2 en revanche s'applique aux fonctions de plusieurs variables, mais nécessite un lemme de zéros effectif.

Le Théorème 1 du Paragraphe 2.b permet, par exemple, d'obtenir comme corollaire le récent résultat de K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert [2] sur la transcendance des valeurs de la fonction modulaire j aux points algébriques (*voir* Paragraphe 6.a). Il permet aussi de retrouver le Corollaire 3.2 de [9] (ce que ne permettait pas [14], Corollaire 8). Nous explicitons ces applications à la transcendance au Paragraphe 6. La preuve du Théorème 1 nécessite d'étendre le principe de Schwarz de [14] en un principe de Schwarz approché (ou de petites valeurs), ce raffinement n'est utilisé que dans les applications à l'indépendance algébrique.

Les théorèmes 1 et 2 du Paragraphe 2.b permettent d'aborder l'indépendance algébrique par une approche tout à fait nouvelle. D. Roy et M. Waldschmidt [19] sont parvenus à démontrer l'indépendance algébrique de deux nombres par une méthode voisine, basée sur une propriété d'approximation fine s'inspirant d'un théorème de Wirsing (*cf.* [20, Chap. 8, Paragraphe 3, Théorème 3B]). Le principe des tiroirs est suffisant dans notre méthode, mais réintroduit quand même une hypothèse de compacité locale, évitée pour la transcendance. On illustre cette approche au Paragraphe 7 en montrant l'indépendance algébrique d'au moins deux valeurs de la fonction exponentielle d'un module de Drinfeld en certains points et en donnant une démonstration originale de l'indépendance algébrique des nombres e^{π}, π et $\Gamma(1/4)$.

Combinée aux résultats de [17] (*voir* aussi la Proposition 9 du Paragraphe 5), la méthode fonctionne pour les degrés de transcendance $\leqslant 3$ (4 dans certains cas), et sous des conjectures d'approximation pour les degrés de transcendance supérieurs. En particulier, nous formulons au Paragraphe 5 deux problèmes d'approximation dont on répond au premier en petites dimensions et dont le second, plus optimiste, permettrait d'aller beaucoup plus loin que les résultats actuellement connus sur les grands degrés de transcendance. Nous expliquons cela dans un dernier paragraphe (Paragraphe 8) spéculatif.

On reprend le cadre et les préliminaires de [14, Paragraphe 2]. Au Paragraphe 3, on étend le principe de Schwarz établi dans [14] en un principe de Schwarz approché et on rassemble quelques lemmes techniques utilisés dans l'estimation du déterminant d'interpolation. Bien que la démonstration du principe de Schwarz du Paragraphe 3.a ne fasse pas appel à des idées nouvelles sa forme très précise nous semble intéressante en elle-même (on le comparera par exemple au Lemme 4.5 de [18]). Les démonstrations des résultats principaux font l'objet du Paragraphe 4. Voici le plan synoptique de l'article.



Je remercie V. Bosser, S. David, L. Denis, F. Pellarin à Paris, K. Barré-Sirieix, F. Gramain, G. Philibert et toute l'équipe stéphanoise pour leur intérêt. Je remercie également M. Laurent, D. Roy, M. Waldschmidt pour d'intéressantes discussions sur les propriétés d'approximation et leurs applications à l'indépendance algébrique, et tout spécialement G. Diaz pour ses nombreuses et pertinentes remarques sur la rédaction de ce texte.

2. RÉSULTATS GÉNÉRAUX ET PRINCIPE DE LA MÉTHODE

(a) *Notations*

On se donne un anneau faiblement diophantien A (*voir* [14, Paragraphe 2.a] pour la définition) et un sur-anneau C de A, commutatif, unitaire, intègre, noethérien et muni d'une extension de la valeur absolue distinguée $|\cdot|$ de A, non discret et complet pour cette extension. On rappelle [14, Paragraphe 2.a], qu'on note $\eta_0 = 0$ si $|\cdot|$ est ultramétique et $\eta_0 = 1$ si $|\cdot|$ est archimédienne, supposée normalisée de sorte à coïncider avec la restriction de la valeur absolue ordinaire de $\mathbf{C}$ à l'image isomorphique de C sur un sous-corps de $\mathbf{C}$. On note T la taille sur A, $\eta = \eta(T) = \log \bar{T}(2)$ (*cf.* [14]), et on suppose dans toute la suite que l'inégalité de la taille est satisfaite avec Ψ linéaire, $\Psi(X) = aX$, $(a \geqslant 0)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in A \setminus \{0\}$ on a

$$-a \log \bar{T}(x) \leqslant \log |x| \leqslant \log \bar{T}(x).$$

Pour $i \geqslant 1$ on considère un anneau A_i, clôture intégrale de A dans une extension finie du corps des fractions de A dans celui de C. On notera $A_0 = A$, K_i $(i \geqslant 0)$ désignera le corps des fractions de A_i et $[K_i : K_0]_s$ le degré séparable de K_i sur K_0. Nous noterons $\mathrm{Plg}(K_i/K_0)$ l'ensemble des plongements de K_i dans une clôture algébrique du corps des fractions de C, son cardinal est égal à $[K_i : K_0]_s$.

Rappelons que la taille T sur A est la donnée d'une famille de pseudo-valeurs absolues indexée par un ensemble J muni d'une mesure ν, on prolonge cette taille à toute clôture intégrale A' de A dans une extension finie K' du corps des fractions K de A de la façon suivante. On considère pour chaque pseudo-valeur absolue W de la famille un système complet de prolongements à A'. Plus précisément, si I désigne l'idéal premier des éléments $x \in A$ satisfaisant $W(x) = 0$, la pseudo-valeur absolue W induit une valeur absolue sur le corps des fractions Q de A/I. On considère un idéal I' de A' au-dessus de I, et un système complet de prolongements de

W au corps des fractions Q' de A'/I'. Pour $W' \mid W$ on note $\mu(W') = [Q'_{W'} : Q_W]_s / [Q' : Q]_s$ le quotient des degrés séparables des extensions des complétés en W et W' et des corps Q et Q' respectivement, on a $\sum_{W' \mid W} \mu(W') = 1$. Enfin, la taille sur A' est la famille $J' := \{(j, W'); j \in J, W' \mid W_j\}$ muni de la mesure $\nu' := \nu \times \mu$. On vérifie que cela définit bien une taille sur A' et on a $T(x) = T(\mathrm{Norme}_{Q'/Q}(x))^{1/[Q' : Q]}$ et $\bar{T}(\mathrm{Norme}_{Q'/Q}(x))^{1/[Q' : Q]} \leqslant \bar{T}(x)$ pour $x \in A'$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on appellera *ensemble pondéré* un sous-ensemble $S \subset \mathbf{N}^n \times C^n$ tel que pour tout $x \in C^n$ l'ensemble $S \cap (\mathbf{N}^n \times \{x\})$ s'identifie à un sous-ensemble S_x de $\mathbf{N}^n$ satisfaisant $\mathbf{N}^n \cap (S_x - \mathbf{N}^n) \subset S_x$ (on dira encore qu'un tel ensemble est un *dessous d'escalier*). On appellera *support*, noté Supp S, d'un ensemble $S \subset \mathbf{N}^n \times C^n$ son image par la projection $\pi: \mathbf{N}^n \times C^n \to C^n$ et la *multiplicité* de S, notée $m(S)$ est la plus grande longueur (éventuellement infinie) de la première composante d'un élément de S. On notera encore $|S| = \sup_{x \in S} |\pi(x)|$ où pour $y \in C^n$ la norme est $|y| = \max(|y_i|; i = 1, ..., n)$.

Si $0 < r' \leqslant r$ et $S \subset \mathbf{N} \times B(0, r)$ ($B(0, r)$ désigne la boule de rayon r centrée en 0 dans C, *i.e.* $\{y \in C; |y| < r\}$), on note $E_{r, r'}(\emptyset) = 1$ et sinon

$$E_{r, r'}(S) := \begin{cases} \left(\dfrac{r'}{r}\right)^N \cdot \displaystyle\prod_{x \in S} \dfrac{1 + (|\pi(x)|/r')}{1 + (|\pi(x)|\, r'/r^2)} \in \,]0, 1] & \text{si} \quad \eta_0 = 1 \\ \left(\dfrac{r'}{r}\right)^N \cdot \displaystyle\prod_{x \in S} \max(1, |\pi(x)|/r') \in \,]0, 1] & \text{si} \quad \eta_0 = 0 \end{cases}$$

où $\pi: \mathbf{N} \times C \to C$ est la seconde projection, et pour $y \in C$

$$F_y(S) := \max_{\substack{x \in S \\ \pi(x) \neq y}} \left(1, \frac{2^{\eta_0}}{|y - \pi(x)|}\right) \geqslant 1.$$

Supposons $S = \{x_1, ..., x_N\}$ ordonné de sorte que, pour $i = 1, ..., N$ l'ensemble $S^{(i)} = \{x_i, ..., x_N\}$ soit un ensemble pondéré et que la quantité

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} r E_{r, r'}(\pi(x_j)) \cdot (F_{\pi(x_i)}(S \backslash S^{(j+1)}) + 2\eta_0\, |S \backslash S^{(j+1)}|/r^2) \right)$$

soit minimale. On note $G_{r, r'}(\emptyset) = 1$ et sinon $G_{r, r'}(S)$ le maximum de 1 et de cette quantité minimale. Enfin, pour tout sous-ensemble S de $\mathbf{N}^n \times B(0, r')^n$ on notera

$$H_{r'}(S) := \max_{(t, y) \in S} (1, (r' - \eta_0\, |y|)^{-|t|}) \geqslant 1.$$

Les quantités $E_{r,r'}(S)$, $G_{r,r'}(S)$, et $H_{r'}(S)$ interviennent de façon essentielle dans le principe de Schwarz approché pour S (*cf.* Paragraphe 3). Nous appellerons $E_{r,r'}(S)$ (*resp.* $G_{r,r'}(S)$) *l'attraction* (*resp. la gravitation*) de S dans la *couronne de rayons* r, r'. La quantité $E_{r,r'}(S)$ est dérivée des produits de Blaschke tandis que $G_{r,r'}(S)$ intervient classiquement dans les lemmes d'interpolation. Lorsque $S \subset \mathbf{N} \times B(0, r')$ on a $E_{r,r'}(S) \leqslant (2^{\eta_0} r'/r)^N$ et $G_{r,r'}(S) \leqslant (4^{\eta_0} \cdot (\eta_0 + r'/\delta))^{N-1}$ où $\delta = \min_{x,\, y \in S,\, \pi(x) \neq \pi(y)} (1, |\pi(x) - \pi(y)|)$. Lorsque $\eta_0 = 1$, $C = \mathbf{C}$, on a la majoration plus précise (apparaissant dans le Lemme 4.5 de [18]) $G_{r,r'}(S) \leqslant (66r'/\delta M^{1/\gamma})^{N-1}$ où M est le cardinal du support de S et $\gamma = 1$ si les points de ce support sont alignés et $\gamma = 2$ sinon. Une quantité parasite qui interviendra également, lorsque $\eta_0 = 1$, est

$$\bar{E}_{r,r'}(S) := \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{2r(r' + |\pi(x_j)|)}{r^2 + r'\,|\pi(x_j)|} \right)^{\eta_0} \in [1, 2^{\eta_0(N-1)}]$$

où $S = \{x_1, ..., x_N\}$ est ordonné comme dans la définition de $G_{r,r'}(S)$. On a $\bar{E}_{r,r'}(S) = 1$ si $\eta_0 = 0$ et il semble raisonnable de conjecturer que cette quantité peut également être remplacée par 1 dans le principe de Schwarz lorsque $\eta_0 = 1$.

On notera $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ (*resp.* $\mathbf{R}_{>0}$) l'ensemble des réels $\geqslant 0$ (*resp.* >0) et $\bar{\mathbf{R}}$ (*resp.* $\bar{\mathbf{R}}_{\geqslant 0}$, $\bar{\mathbf{R}}_{>0}$) l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (*resp.* $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$, $\mathbf{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$). Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $R \in \bar{\mathbf{R}}_{>0}$, nous utiliserons la notion de fonction analytique dans $B(0, R)^n := \{y \in C^n; |y| < R\}$ $(|y| = \max(|y_i|; i = 1, ..., n))$ et les propriétés de ces fonctions décrites dans [14, Paragraphe 2.b]. Dans tout ce texte on notera log le logarithme en base 2 et, pour assurer l'homogénéité des formules, nous dirons qu'une fonction f analytique dans $B(0, R)^n$ est de type $\leqslant \omega$ où ω: $[0, R[\to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ est croissante, si $\log M_0(f, r) \leqslant \omega(r)$ pour $0 \leqslant r < R$, où $M_0(f, r) := \sup_{z \in \bar{Q}^n;\, |z| \leqslant r} |f(z)|$ ($\bar{Q}$ désignant une clôture algébrique du corps des fractions de C).

(b) *Énoncé des Résultats*

Nous allons maintenant énoncer deux théorèmes renfermant le coeur commun à toutes les démonstrations de transcendance. Une fois ces théorèmes démontrés on verra sur des exemples comment les utiliser pour établir la transcendance ou l'indépendance algébrique de nombres (Paragraphes 6, 7, et 8). Ainsi, il faut envisager ces deux théorèmes comme des outils parmi d'autres (lemmes de zéros, propriétés d'approximation,...) de la théorie des nombres transcendants. Nous énonçons et démontrons ces théorèmes dans le cadre le plus général que nous avons introduit, ils font intervenir des fonctions analytiques, des points et des approximations des valeurs des fonctions en ces points. Les fonctions et les points fournissent ce que nous appellerons les *paramètres primaires*. On postule un choix de monômes en les fonctions et un parcours des points sous la forme d'une suite de sous-ensembles. Nous introduisons huit *paramètres secondaires* qui contrôlent ces choix et les approximations via sept contraintes. Chacun des théorèmes 1 et 2 montre que sous une condition supplémentaire sur les paramètres il existe une fonction polynomiale en les fonctions de départ (supportée par notre choix de monômes) qui s'annule en tous les points considérés, c'est l'hypothèse typique d'un lemme de zéros.

Soient $R \in \bar{\mathbf{R}}_{>0}$, $d, n, L \in \mathbf{N}^*$, $d > n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_d)\colon [0, R[\to (\mathbf{R}_{\geqslant 0})^d$ et $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_d)$ une famille de fonctions analytiques dans $B(0, R)^n \subset C^n$, f_i étant de type $\leqslant \omega_i$. Soit $\mathscr{D} \subset \mathbf{N}^d$ un sous-ensemble fini de cardinal L, nous noterons $\mathscr{D}\omega := \max_{h \in \mathscr{D}}(h_1\omega_1 + \cdots + h_d\omega_d)$ et, si S est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}^n \times B(0, R)^n$, nous notons ici $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(S)$ la matrice $(D_t(f_1^{h_1} \cdots f_d^{h_d})(y))_{(t, y) \in S, h \in \mathscr{D}}$. La taille d'une matrice à coefficients dans $\bar{A}$ est simplement la taille de la famille de ses coefficients. On peut penser à $\mathscr{D}$ comme au support d'une fonction auxiliaire potentielle.

Soient $U\colon \mathbf{N} \to \bar{\mathbf{R}}_{\geqslant 0}$ et $\phi, \delta, \varrho, r', E, N\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ des fonctions, on suppose qu'il existe une suite (finie ou infinie) d'ensembles $\varnothing = S_0, S_1, S_2, \ldots$ de $\mathbf{N}^n \times B(0, R)^n$ telle que, pour $i \geqslant 0$,

$$C_{r, r'}\colon |S_{i+1}| < r'(i) \leqslant r(i) < R.$$

Si la suite est finie (*i.e.*, $\varnothing = S_0, S_1, ..., S_{i_0}$) on pose $S_i = \varnothing$ pour $i > i_0$.

On suppose en outre qu'il existe une suite d'ensembles pondérés $S'_1, S'_2, \ldots$ de $\mathbf{N} \times B(0, R)$ telle que, pour $i \geqslant 1$,

$$C_{N, r}\colon \operatorname{card}(S'_i) \leqslant N(i), \qquad |S'_i| \leqslant r(i),$$

$$C_E\colon E(i) \geqslant E_{r(i), r'(i)}(S'_i) \cdot H_{r'(i)}(S_{i+1}) \cdot \bar{E}_{r(i), r'(i)}(S'_i)^{n-1}.$$

Remarque. Si $n = 1$ le terme parasite $\bar{E}_{r(i), r'(i)}(S'_i)$ n'apparaît pas. Les ensembles S_i énumèrent les points sur lesquels on extrapole tandis que les ensembles S'_i renferment les points à partir desquels on extrapole. En pratique on a intérêt à prendre S'_i le plus gros possible dans C_E (qui contrôle l'attraction de S'_i sur S_{i+1}), mais ce choix est tempéré par les contraintes $C_{N, r}$ et C_U ci-dessous. La contrainte $C_{r, r'}$ garantit qu'il est raisonnable d'appliquer le principe de Schwarz sur la couronne de rayons r', r.

Un sous-ensemble fini $\mathscr{D} \subset \mathbf{N}^d$ de cardinal L étant fixé, on suppose qu'il existe une suite $K = K_0, K_1, K_2, \ldots$ d'extensions finies de K et pour tout

$i \geqslant 0$, tout $\sigma \in \mathrm{Plg}(K_{i+1}/K)$ et tout $x \in S_{i+1}$ il existe $U^{\sigma}(i) \in \overline{\mathbf{R}}$ et $m_{i+1,x} \in A_{i+1}^{L}$, où A_{i+1} désigne la clôture intégrale de A dans K_{i+1}, satisfaisant les propriétés suivantes:

$$C_{\delta}\colon \delta(i) = [K_{i+1} : K]_s,$$

$$C_U\colon \sum_{\sigma} U^{\sigma}(i) = \delta(i)\, U(i),$$

et il existe $\lambda_{i+1,x,\sigma} \in Q = \mathrm{Frac}(C)$ tel que

$$\log |\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x) - \lambda_{i+1,x,\sigma}\sigma(m_{i+1,x}) - \sum_{\substack{j \leqslant i \\ y \in S_j}} \sum_{\tau \in \mathrm{Plg}(K_j/K)} \mu_{j,y,\tau} \cdot \tau(m_{j,y})| \leqslant -U^{\sigma}(i)$$

où $\mu_{j,y,\tau} \in Q$ dépend de (i, x, σ), et pour tout $x' \in S_i'^n$ on a

$$\begin{aligned} &\log \left| \mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x') - \sum_{\substack{j \leqslant i \\ y \in S_j}} \sum_{\tau \in \mathrm{Plg}(K_j/K)} \mu'_{j,y,\tau} \cdot \tau(m_{j,y}) \right| \\ &\qquad \leqslant -U^{\sigma}(i) - \log(G_{r(i),r'(i)}(S_i')^n\, H_{r'(i)}(S_{i+1})) \end{aligned}$$

où $\mu'_{j,y,\tau} \in Q$ dépend de (i, x', σ). On suppose enfin que pour tout $i \geqslant 0$ et $x \in S_{i+1}$

$$C_{\phi}\colon \log \overline{T}(m_{i+1,x}) \leqslant \phi(i),$$

$$C_{\varrho}\colon \sum_{\sigma} \log \max(|\sigma(m_{i+1,x})|, |\lambda_{i+1,x,\sigma}|^{-1}) \leqslant \delta(i)\, \varrho(i).$$

On associe ainsi à tout $(i, x) \in \bigcup_{i \geqslant 1} (\{i\} \times S_i)$ et $\sigma \in \mathrm{Plg}(K_i/K)$ un couple $(\lambda_{i,x,\sigma}, m_{i,x})$, on note $M_{\mathscr{D}}$ la matrice formée des colonnes $m_{i,x}$ lorsque (i, x) parcourt $\bigcup_{i \geqslant 1} (\{i\} \times S_i)$.

Remarque. La contrainte C_U est duale, elle contrôle simultanément la qualité de l'approximation algébrique des points sur lesquels on extrapole et de l'approximation analytique des points à partir desquels on extrapole. Ce lien entre les deux approximations est indispensable pour mener à bien l'extrapolation.

Si pour tout $i \geqslant 1$ il existe $\sigma \in \mathrm{Plg}(K_i/K_0)$ tel que $\mathbf{f}(x) \in \sigma(A_i^d)$ pour tout $x \in S_i$ et $\mathbf{f}((S_{i-1}')^n) \subset \mathbf{f}(S_{i-1})$ on peut prendre $\lambda_{i,x,\sigma} = 1$, $m_{i,x} \in A_i^L$ tel que

$\sigma(m_{i,x}) = \mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x)$, $U^{\sigma} \equiv U \equiv +\infty$ et, pour $\sigma' \neq \sigma$, $U^{\sigma'}(i-1)$ le minimum des quantités

$$-\log |\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x') - \sigma'(m_{i-1,x'})| - \log(G_{r(i-1),\, r'(i-1)}(S'_{i-1})^n\, H_{r'(i-1)}(S_i)) \\ - \log |\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x) - \sigma'(m_{i,x})|,$$

pour tout $x \in S_i$ et $x' \in (S'_{i-1})^n$. C'est le cas lorsqu'on veut montrer de la transcendance et on identifiera alors $m_{i,x}$ et $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x)$. On peut prendre également dans ce cas $\varrho \equiv \phi$ grâce à l'inégalité de la taille dans A. Pour établir de l'indépendance algébrique nous expliquons au Paragraphe 5 un point de vue (largement conjectural) pour construire les approximations $m_{i,x}$. Lorsque la suite des ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_{i_0}$ est finie les sept contraintes sont satisfaites pour $i \geqslant i_0$ en posant $S_{i+1} = S'_i = \emptyset$, $K_{i+1} = K_0$, $U(i) = +\infty$, $N(i) = r'(i) = r(i) = E(i) = \phi(i) = \varrho(i) = 0$ et $\delta(i) = 1$.

On peut maintenant énoncer le Théorème 1 où on reprend les notations et contraintes introduites.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathscr{D} \subset \mathbf{N}^d$ *tel que* $L = \operatorname{card} \mathscr{D} > \delta(0) \operatorname{card}(S_1)$, *alors si pour tout* $j \geqslant 1$

$$C_1 : \min\left(\frac{-\log E(j) - \mathscr{D}\omega(r(j))}{\delta(j)},\ U(j)\right) \\ > a\phi(j) + \varrho(j) + \Delta_j + \frac{\delta(0)\operatorname{card}(S_1)}{L - \delta(0)\operatorname{card}(S_1)} \cdot (a\phi(0) + \varrho(0) + \Delta_0)$$

où $\Delta_j := (a\eta + 2\eta_0)\log(2L) + \eta_0 n \log \max(n, 2N(j))$ *et* $\Delta_0 := (a\eta + \eta_0)\log L$, *la matrice* $M_{\mathscr{D}}$ *est de rang* $< L$.

Remarque. Les termes Δ_j doivent être considérés comme des termes d'erreur. Lorsque $S_i = \tilde{S}_i^n$ est un ensemble produit et $M_{\mathscr{D}} = \mathbf{f}^{\mathscr{D}}(\bigcup_{i \geqslant 1} S_i)$, l'estimation des zéros de [14], Paragraphe 2.c, montre que sous la condition

$$\frac{\log E_{r(i),\, |\tilde{S}_{i+1}|}(\tilde{S}_{i+1})^{-1} - \eta_0(n-1)\,(\operatorname{card}(\tilde{S}_{i+1}) + 1) - \omega(r(i))}{\max(1, \log |\tilde{S}_{i+1}|^{-1})} \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty$$

la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est de rang maximal card $\mathscr{D}$ pour tout $\mathscr{D}$. Ainsi, le théorème ci-dessus contient le Théorème 4 de [14] et ses corollaires. On y a $\delta = 1$, $\omega_1 = \cdots = \omega_d$, $\phi(i)$ y est de la forme $h\Phi(i) + \kappa(m(i))$, h reflétant la dépendance en $\mathscr{D} = \{\alpha \in \mathbf{N}^*;\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leqslant h\}$.

Nous allons maintenant énoncer le Théorème 2 où on suppose que la suite d'ensembles est réduite à $\emptyset = S_0, S_1$. Soient donc $S \subset \mathbf{N}^n \times B(0, R)^n$, r', r, ϕ, δ, ϱ des réels $\geqslant 0$ et $U \in \overline{\mathbf{R}}_{\geqslant 0}$. On suppose $C_{r,r'}$ (pour $i = 0$) et qu'il existe une extension finie K_1 de K et pour tout $x \in S$, $\sigma \in \mathrm{Plg}(K_1/K)$ des éléments $U^\sigma \in \overline{\mathbf{R}}$, $m_x \in A_1^L$ et $\lambda_{x,\sigma} \in Q$ satisfaisant C_δ, C_ϕ, C_ϱ (pour $i=0$) ainsi que la condition C'_U suivante:

$$C'_U\colon \sum_\sigma U^\sigma = \delta U \qquad \text{et} \qquad \log|\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(x) - \lambda_{x,\sigma} \cdot \sigma(m_x)| \leqslant -U^\sigma.$$

On note $M_{\mathscr{D}} = (m_x)_{x \in S}$.

Théorème 2. *Soit $\mathscr{D} \subset \mathbf{N}^d$ tel que $L = \mathrm{card}\,\mathscr{D} > 2^{5n}$, si*

$$C_2\colon \tfrac{1}{2} \cdot \min(\Upsilon, U) > a\phi + \varrho + (a\eta + \eta_0)\log(2L)$$

où $\Upsilon := (1/\delta) \cdot (2^{-5} n L^{1/n} \log(r/r') - \gamma(\mathscr{D}\omega(r) - m(S)\log(r - \eta_0 r')))$ avec $\gamma = 1$ ou 2 selon que $\mathscr{D}\omega(r) \leqslant m(S)\log(r - \eta_0 r')$ ou non, la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est de rang $< L$.

Le Théorème 1 sera utilisé dans les situations avec ou sans lemme de zéros effectif, tandis que le Théorème 2 n'interviendra qu'avec un lemme de zéros effectif pour les fonctions $f_1, ..., f_d$. On notera que les contraintes s'écrivent uniquement pour $i=0$ dans le Théorème 2, les contraintes $C_{N,r}$, C_E sont sans objets et la contrainte C_U est également simplifiée en C'_U. Enfin, pour la transcendance nous avons vu dans la remarque précédente que la contrainte C'_U est trivialement satisfaite.

(c) *Un "algorithme" pour la transcendance*

Les théorèmes 1 et 2 renferment ce qu'on peut appeler la méthode de transcendance (qui correspond à la construction-extrapolation des démonstrations traditionnelles de transcendance). La conclusion sur le rang de la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est l'hypothèse d'un lemme de zéros, tandis que la négation des conditions C_1 et C_2 fournit une majoration de U. Un lemme de zéros asymptotique peut être suffisant lorsqu'on dispose de beaucoup de bonnes approximations (par exemple, si on peut prendre $U \equiv +\infty$), mais un lemme de zéros effectif permettra d'obtenir des mesures d'approximation des valeurs de nos fonctions par des nombres algébriques. Nous verrons au Paragraphe 5 comment de telles mesures, combinées à des propriétés d'approximation générales, minorent le degré de transcendance des corps engendrés par les valeurs de ces fonctions.

Nous allons décrire ici comment le Théorème 1 fournit un algorithme pour établir la transcendance de valeurs de fonctions analytiques $f_1, ..., f_d$. De façon générale, on veut montrer que des fonctions analytiques sur C^n ne prennent pas des valeurs dans l'anneau diophantien A en certains points. On commence par recenser toutes les fonctions analytiques et l'ensemble pondéré S sur lequel ces fonctions prennent des valeurs algébriquement dépendantes des valeurs considérées. Lorsqu'on suppose tous les éléments de $\mathbf{f}(S)$ entiers sur A, on identifie ces valeurs avec leurs approximations ce qui permet de prendre $U \equiv +\infty$ et $\varrho \equiv \phi$ (*cf.* première remarque de la section précédente). Ceci donne a, d, n, R, et ω. Résumons les paramètres dans un tableau:

Paramètres primaires	a, η, η_0	cadre diophantien $A \subset C$
	$d > n$	nombres de fonctions et de variables $f_1(z), \ldots, f_d(z)$
	R	rayon d'analyticité
	$\omega_1, \ldots, \omega_d$	croissances de $f_1, \ldots, f_d$ en fonction de $r \in [0, R[$
	S	sous-ensemble de $\mathbf{N}^n \times C^n$
Choix de $\mathcal{D}$	sous-ensemble de $\mathbf{N}^d$ (monômes)	
Parcours de S	$\emptyset = S_0, S_1, \ldots \quad S \supset \cup_{i \geq 1} S_i, \quad S_i' \subset \mathbf{N} \times C$	
Paramètres secondaires	r, r', E, N	approximation analytique contraintes $C_{r,r'}$, $C_{N,r}$ et C_E
	ϕ, δ	approximation arithmétique contraintes C_ϕ et C_δ

et les contraintes mentionnées dans le tableau:

$C_{r,r'}$	$\lvert S_{i+1} \rvert \leq r'(i) \leq r(i) < R$
$C_{N,r}$	$\operatorname{card} S_i' \leq N(i)$, $\lvert S_i' \rvert \leq r(i)$
C_E	$E(i) \geq E_{r(i),r'(i)}(S_i').H_{r'(i)}(S_{i+1}).\overline{E}_{r(i),r'(i)}(S_i')^{n-1}$
C_δ	$\delta(i) = [K_{i+1} : K_0]_s$
C_ϕ	$\forall x \in S_{i+1}, \ \log \overline{T}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(x)) \leq \phi(i)$

On utilise le Théorème 1 et l'on doit donc satisfaire de plus la condition

C_1	$\frac{-\log E(i) - \mathcal{D}\omega(r(i))}{\delta(i)} > (a+1)\phi(i) + \Delta_i + \frac{\delta(0) \operatorname{card} S_1}{L - \delta(0) \operatorname{card} S_1}\Big((a+1)\phi(0) + \Delta_0\Big)$

où

$$L = \text{card } \mathscr{D} > \delta(0) \text{ card } S_1$$

et

$$\Delta_i = (a\eta + 2\eta_0) \log(2L) + \eta_0 n \log \max(n, 2N(i)).$$

Supposons $n = 1$, le problème délicat est bien sûr la détermination de $\mathscr{D}$ et le parcours de S. On ordonne $\mathscr{D}$ par la longueur des éléments de $\mathbf{N}^d$ raffinée par un ordre lexicographique convenable. Chaque ensemble S_i est réduit à un point et on ajoute ainsi un à un les points de S dans un ordre précis, dans la pratique on pourra souvent prendre $S'_i = \bigcup_{j=1}^{i} S_j$. Pour deviner cet ordre optimal, remarquons que pour $x \in S$, $r \geqslant r' \geqslant |\pi(x)|$ et $S_1, S' \subset S$ la condition

$$A_x(r, r', S') > B(S_1)$$

où

$$A_x(r, r', S') := \frac{-\log E_{r,r'}(S') - \log H_{r'}(x) - \mathscr{D}\omega(r)}{\delta(x)} - (a+1)\,\phi(x)$$
$$-(a\eta + 2\eta_0) \log(2L) - \eta_0 \log(2 \text{ card } S')$$
$$B(S_1) := \frac{\delta(0) \text{ card } S_1}{L - \delta(0) \text{ card } S_1} \cdot \max_{y \in S_1} ((a+1)\,\phi(y) + (a\eta + \eta_0) \log L)$$

est la contrainte C_1 du Théorème 1.

Pas 1. On ordonne l'ensemble S de façon récursive. Si on a $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_i$ alors x_{i+1} est choisi de multiplicité minimale dans $S \backslash \{x_1, ..., x_i\}$ tel que, pour tout $y \in S \backslash \{x_1, ..., x_i\}$,

$$A(x_{i+1}) := \sup_{R > r \geqslant r' \geqslant |\pi(x_{i+1})|} A_{x_{i+1}}(r, r', S'_i) \geqslant \sup_{R > r \geqslant r' \geqslant |\pi(y)|} A_y(r, r', S'_i)$$

où $S'_i = \{x_1, ..., x_i\}$. De cette façon on est assuré que $A(x_{i+1})$ est maximal par rapport à l'arrangement de S. On en déduit les valeurs de $r'(x_{i+1})$ et $r(x_{i+1})$.

Pas 2. Il reste à initialiser l'algorithme. On pose $S_1^{(0)} = \{x \in S;\ A(x) \leqslant 0\}$, puis par récurrence, si card $S_1^{(j)} < L$, $S_1^{(j+1)} = \{x \in S;\ A(x) \leqslant B(S_1^{(j)})\}$. S'il advient card $S_1^{(j)} \geqslant L$ pour un j on augmente $\mathscr{D}$ et on recommence le pas 1, sinon on pose $S_1 := S_1^{(j)} = \{x_1, ..., x_{i_0}\}$ dès que $S_1^{(j)} = S_1^{(j+1)}$ et, pour $i \geqslant 1$, $S_{i+1} := \{x_{i+i_0}\}$. S'il advient $A(x_{i+i_0}) \leqslant B(S_1)$ pour un $i \geqslant 1$ on augmente $\mathscr{D}$ et on recommence le pas 1.

Pas 3. Si les pas 1 et 2 peuvent être achevés pour un $\mathscr{D}$ de cardinal fini alors les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites et la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est de rang $<\operatorname{card}\mathscr{D}$. On en déduit que les éléments de $\mathbf{f}(S)$ satisfont une relation de dépendance algébrique sur A supportée par les monômes de $\mathscr{D}$, à moins qu'on puisse assurer que la matrice $\mathscr{D}$ est bel et bien de rang card $\mathscr{D}$ auquel cas l'hypothèse $\mathbf{f}(S)$ algébrique sur A est mise en défaut.

3. OUTILS

(a) *Principe de Schwarz Approché*

Nous devons étendre le principe de Schwarz énoncé dans [14] en un principe de Schwarz approché, où les fonctions prennent des petites valeurs (plutôt que de s'annuler) sur un ensemble pondéré. Nous considérons ici des ensembles produits de C^n et commençons par un lemme. Rappelons que nous utilisons les fonctions $\varphi_{y,r}(z) := (z-y)/(1-(z\bar{y}/r^2))^{\eta_0}$ où $y \in B(0, r)$. C'est une fonction analytique dans $B(0, r)$ qui satisfait $M_0(\varphi_{y,r}; r') \leqslant r \cdot E_{r,r'}(y)$ si $r' \leqslant r$ et si $|y| < |z| = r$ alors $|\varphi_{y,r}(z)| = r$. Nous adoptons la notation abrégée $z = (z_1, ..., z_n)$, $r = (r_1, ..., r_n)$, ...

LEMME 3. *Soient $U \in \overline{\mathbf{R}}$, $\overline{F} \in \mathbf{R}_{>0}$, f une fonction analytique dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_n)$ et, pour $i = 1, ..., n$, $0 < r'_i \leqslant r_i < R_i$ des réels et S_i un ensemble pondéré de support dans $B(0, r_i)$. Alors, pour $y \in \operatorname{Supp} S_n$ on a*

$$f(z) = c(z_1, ..., z_{n-1}) + g(z) \cdot \varphi_{y, r_n}(z_n)$$

où c est une fonction analytique dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_{n-1})$, g est analytique dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_n)$ et

$$M_0(c; r_1, ..., r_{n-1}) \leqslant M_0(f; r), \qquad M_0(g; r) \leqslant \frac{M_0(f-c; r)}{r_n},$$

$$M_0(f; r') \leqslant \begin{cases} M_0(c; r'_1, ..., r'_{n-1}) + M_0(g; r') \cdot r_n E_{r_n, r'_n}(y) & \text{si} \quad \eta_0 = 1 \\ \max(M_0(c; r'_1, ..., r'_{n-1}); M_0(g; r') \cdot r_n E_{r_n, r'_n}(y)) & \text{si} \quad \eta_0 = 0 \end{cases}.$$

De plus, si $(t, z) \in \mathbf{N}^n \times B(0, r_1) \times \cdots \times B(0, r_n)$, $\overline{F} \geqslant F_{z_n}(y)$ et

$$\overline{F}^{-i} \cdot |D_{(t_1, ..., t_{n-1}, i)} f(z)| \leqslant 2^{-U}$$

pour $i = 0, ..., t_n$, alors

$$D_{(t_1, ..., t_{n-1})} c(z_1, ..., z_{n-1}) \leqslant 2^{-U}$$
$$\overline{F}^{-i} \cdot |D_{(t_1, ..., t_{n-1}, i)} g(z)| \leqslant 2^{-U} \cdot (\overline{F} + 2\eta_0 \, |y|/r_n^2)$$

pour $i = 0, ..., t_n$ si $y \neq z_n$ et $i = 0, ..., t_{n-1}$ si $y = z_n$.

Démonstration. La première partie de l'énoncé découle du Lemme 1 de [14], pour la dernière on a $D_{t'}c(z') = D_{(t',0)} f(z', y)$ où $t' = (t_1, ..., t_{n-1})$, $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$ ce qui montre l'assertion sur c et qu'il suffit de traiter le cas $n = 1$. On se place dans ce cas, on note $r := r_1$, $S := S_1$, $z := z_1$, ... et on écrit formellement, pour $(t, z) \in S$,

$$D_t g(z) = \sum_{i=0}^{t'} D_i(g\varphi_{y,r})(z) \cdot D_{t-i}\varphi_{y,r}^{-1}(z)$$

où $t' = t$ si $z \neq y$ et $t' = t+1$ si $z = y$ (on remarque dans ce dernier cas que $g\varphi_{y,r}(y) = 0$). On développe $1/\varphi_{y,r}$ au voisinage de chaque point de Supp S et on vérifie que, si $z \neq y$, $D_0\varphi_{y,r}^{-1}(z) = (1 - (|y|/r)^2)^{\eta_0}/(z-y) - \eta_0(\bar{y}/r^2)$ et $D_j\varphi_{y,r}^{-1}(z) = -(1-(|y|/r)^2)^{\eta_0}/(y-z)^{j+1}$ $(j \geqslant 1)$, tandis qu'au voisinage de y on a $\varphi_{y,r}^{-1}(z') = (1-(|y|/r)^2)^{\eta_0}/(z'-y) - \eta_0(\bar{y}/r^2)$ et on pose $D_{-1}\varphi_{y,r}^{-1}(y) = (1-(|y|/r)^2)^{\eta_0}$, $D_0\varphi_{y,r}^{-1}(y) = -\eta_0\bar{y}/r^2$ et $D_j\varphi_{y,r}^{-1}(y) = 0$ $(j \geqslant 1)$. On en déduit que, pour $(t, z) \in S'$ la valeur $|D_t g(z)|$ est majorée par

$$\left|\sum_{i=0}^{t} \frac{D_i(g\varphi_{y,r})(z)}{(y-z)^{t-i+1}}\right| \cdot \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\eta_0} + \eta_0 \frac{|y|}{r^2} \cdot |D_t(g\varphi_{y,r})(z)| \qquad \text{si} \quad z \neq y$$

$$|D_{t+1}(g\varphi_{y,r})(z)| \cdot \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\eta_0} + \eta_0 \frac{|y|}{r^2} \cdot |D_t(g\varphi_{y,r})(z)| \qquad \text{si} \quad z = y.$$

Mais $1 - (|y|/r)^2 \leqslant 1$, $g\varphi_{y,r} = f - c$ et donc, lorsque $\eta_0 = 1$ (le cas $\eta_0 = 0$ étant similaire), $\bar{F}^{-t} \cdot |D_t g(z)|$ est majoré par

$$\bar{F} \cdot \sum_{i=0}^{t} \bar{F}^{-i} \cdot \left(\frac{|y-z|}{2}\right)^{t-i+1} \cdot \frac{|D_i(f-c)(z)|}{|y-z|^{t-i+1}} + \frac{|y|}{r^2}\,\bar{F}^{-t}\,|D_t(f-c)(z)|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{2^{t-i+1}} + \frac{2}{2^{t+1}}\right) \cdot 2^{-U} \cdot \bar{F} + \frac{2\,|y|}{r^2}\,2^{-U} = 2^{-U} \cdot (\bar{F} + 2\,|y|/r^2)$$

si $y \neq z$ car $\bar{F}^{-1} \leqslant F_z(y)^{-1} \leqslant |y-z|/2$ et $|(f-c)(z)| \leqslant 2\,|f(z)|$ dans ce cas, et par

$$\bar{F}^{-t} \cdot |D_{t+1}f(z)| \cdot \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right) + \frac{|y|}{r^2} \cdot \bar{F}^{-t} \cdot |D_t(f-c)(z)| \leqslant 2^{-U} \cdot (\bar{F} + 2\,|y|/r^2)$$

si $y = z$, car $(f-c)(z) = 0$ dans ce cas. ▮

Si $S_n = \{x_1, ..., x_N\}$ est ordonné comme dans la définition de $G_{r_n, r'_n}(S_n)$ et $x_i = (t_i, y_i)$, le Lemme 3 itéré montre, pour $m = 1, ..., N$,

$$f = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{i-1} \varphi_{y_j, r_n} \cdot c_i + \prod_{j=1}^{m} \varphi_{y_j, r_n} \cdot g_m,$$

où les fonctions c_i sont analytiques dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_{n-1})$ et g_m est analytique dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_n)$. On en déduit, si $\eta_0 = 1$,

$$M_0(f, r') \leqslant \sum_{i=1}^{N_n} \prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \cdot M_0(c_i, r') + r_n^{N_n} E_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot M_0(g_{N_n}, r').$$

Le Lemme 3 fournit également les majorations

$$\begin{aligned} M_0(c_m, r) \leqslant M_0(g_{m-1}, r) &\leqslant \frac{M_0(g_{m-2}, r) + M_0(c_{m-1}, r)}{r_n} \\ &\leqslant \cdots \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \frac{M_0(c_i, r)}{r_n^{m-i}} + \frac{M_0(f, r)}{r_n^{m-1}}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à $M_0(c_m, r) \leqslant (2/r_n)^{m-1} \cdot M_0(f, r)$, lorsque $\eta_0 = 1$. Dans le cas $\eta_0 = 0$ on vérifie

$$\begin{aligned} &M_0(f, r') \\ &\quad \leqslant \max_{i=1, \ldots, N_n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \cdot M_0(c_i, r');\, r_n^{N_n} E_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot M_0(g_{N_n}, r') \right), \end{aligned}$$

et $M_0(c_m, r) \leqslant M_0(f, r)/r_n^{m-1}$.

De même, pour $(t', z') \in S_1 \times \cdots \times S_{n-1}$,

$$|D_{t'} c_m(z')| \leqslant |D_{(t', 0)} g_{m-1}(z', y_m)|.$$

Rappelons qu'on note $S_n^{(j)} = \{x_j, \ldots, x_N\}$, grâce au Lemme 3 avec $\bar{F} = F_{z_n}(S_n \backslash S_n^{(j)})$ on vérifie par récurrence

$$F_{z_n}(S_n \backslash S_n^{(m)})^{-t_n} \cdot |D_t g_{m-1}(z)| \leqslant 2^{-U} \cdot \prod_{j=2}^{m} (F_{z_n}(S_n \backslash S_n^{(j)}) + 2\eta_0 \, |S_n \backslash S_n^{(j)}|/r_n^2)$$

pour tout $(t, z) \in S_1 \times \cdots \times S_{n-1} \times S_n^{(m)}$ dès que f prend des valeurs $\leqslant 2^{-U}$ sur $S_1 \times \cdots \times S_n$. Ainsi, sous cette hypothèse, c_m prend des valeurs $\leqslant 2^{-U} \cdot \prod_{j=2}^{m} (F_{y_m}(S_n \backslash S_n^{(j)}) + 2\eta_0 \, |S_n \backslash S_n^{(j)}|/r_n^2)$ sur $S_1 \times \cdots \times S_{n-1}$.

Principe de Schwarz approché. *Soient $U \in \bar{\mathbf{R}}$, f une fonction analytique dans $B(0, R_1) \times \cdots \times B(0, R_n)$ et, pour $i = 1, \ldots, n$, $0 < r'_i \leqslant r_i < R_i$ des réels et S_i un ensemble pondéré de support dans $B(0, r_i)$ et de cardinal $N_i \geqslant 1$. On suppose que f prend des valeurs $\leqslant 2^{-U}$ sur $S_1 \times \cdots \times S_n$, alors*

$$M_0(f; r') \leqslant \begin{cases} 2^{-U} \cdot G + M_0(f; r) \cdot E & si \quad \eta_0 = 1 \\ \max(2^{-U} \cdot G; M_0(f; r) \cdot E) & si \quad \eta_0 = 0, \end{cases}$$

où on a posé $G := \prod_{i=1}^n ((2N_i)^{\eta_0} G_{r_i, r'_i}(S_i))$ *et*

$$E := \begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=i+1}^n 2N_j \bar{E}_{r_j, r'_j}(S_j) \right) \cdot E_{r_i r'_i}(S_i) & si \quad \eta_0 = 1 \\ \max_{i=1, ..., n} (E_{r_i, r'_i}(S_i)) & si \quad \eta_0 = 0. \end{cases}$$

De plus, si $y \in B(0, r'_1) \times \cdots \times B(0, r'_n)$ *et* $t \in \mathbf{N}^n$, *on a*

$$|D_t f(y)| \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{r'_i - \eta_0 |y|} \right)^{t_i} \cdot M_0(f; r').$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n, pour $n = 0$ la fonction f est une constante et le résultat est clair. Traitons le cas $\eta_0 = 1$, le cas $\eta_0 = 0$ étant similaire et plus simple. Écrivons $S_n = \{x_1, ..., x_{N_n}\}$ où les $x_i = (t_i, y_i)$ sont ordonnés comme dans la définition de $G_{r_n, r'_n}(S_n)$, et $S_n^{(i)} = \{x_i, ..., x_{N_n}\}$. On a, d'après la remarque précédant l'énoncé,

$$M_0(f, r') \leqslant r_n^{N_n} E_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot M_0(g_{N_n}, r') + \sum_{i=1}^{N_n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \right) \cdot M_0(c_i, r').$$

Mais

$$\begin{aligned} M_0(g_{N_n}, r') &\leqslant M_0(g_{N_n}, r'_1, ..., r'_{n-1}, r_n) \\ &\leqslant \frac{M_0(g_{N_n - 1}, r'_1, ..., r'_{n-1}, r_n) + M_0(c_{N_n}, r')}{r_n} \\ &\leqslant \cdots \leqslant \sum_{i=1}^{N_n} \frac{M_0(c_i, r')}{r_n^{N_n - i + 1}} + \frac{M_0(f, r)}{r_n^{N_n}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_0(f, r') &\leqslant E_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot M_0(f, r) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_n} \left(r_n^{i-1} E_{r_n, r'_n}(S_n) + \prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \right) \cdot M_0(c_i, r') \\ &\leqslant E_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot M_0(f, r) + 2 \sum_{i=1}^{N_n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \right) \cdot M_0(c_i, r'). \end{aligned}$$

Posons $G_i = \prod_{j=2}^i (F_{y_i}(S_n \backslash S_n^{(j)}) + 2\eta_0 |S_n \backslash S_n^{(j)}| / r_n^2)$, d'après la remarque précédant l'énoncé c_i prend des valeurs $\leqslant 2^{-U} \cdot G_i$ sur $S_1 \times \cdots \times S_{n-1}$ et on a $M_0(c_i, r) \leqslant (2/r_n)^{i-1} \cdot M_0(f, r)$. Utilisant l'hypothèse de récurrence, on applique le principe de Schwarz approché en $n-1$ variables à chacune des fonctions c_i, et on obtient

$$M_0(c_i, r') \leqslant 2^{-U} \cdot G_i \cdot G' + M_0(f, r) \cdot \left(\frac{2}{r_n}\right)^{i-1} \cdot E'$$

où E' et G' désignent les quantités analogues à E et G respectivement pour $S_1 \times \cdots \times S_{n-1}$. On a donc, étant donné que $\prod_{j=1}^{i-1} 2E_{r_n, r'_n}(y_j) \leqslant \bar{E}_{r_n, r'_n}(S'_n)$ et $\prod_{j=1}^{i-1} r_n E_{r_n, r'_n}(y_j) \cdot G_i \leqslant G_{r_n, r'_n}(S_n)$,

$$\begin{aligned} M_0(f, r') \leqslant M_0(f, r) \cdot (E_{r_n, r'_n}(S_n) + 2N_n \bar{E}_{r_n, r'_n}(S'_n) \cdot E') \\ + 2^{-U} \cdot (2N_n G_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot G') \end{aligned}$$

ce qui achève d'établir la récurrence, car $2N_n G_{r_n, r'_n}(S_n) \cdot G' = G$ et $E_{r_n, r'_n}(S_n) + 2N_n \bar{E}_{r_n, r'_n}(S'_n) \cdot E' = E$. Enfin, on écrit

$$\begin{aligned} |D_t f(y)| &\leqslant M_y(f, r'_1 - \eta_0 |y_1|, ..., r'_n - \eta_0 |y_n|) \cdot \prod_{i=1}^{n} (r'_i - \eta_0 |y_i|)^{-t_i} \\ &\leqslant M_0(f, r') \cdot \prod_{i=1}^{n} (r'_i - \eta_0 |y_i|)^{-t_i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. Si $S_1 = \cdots = S_n = S$, $r_1 = \cdots = r_n = r$ et $r'_1 = \cdots = r'_n = r'$ on a $G = ((2N)^{\eta_0} \cdot G_{r, r'}(S))^n$ et $E \leqslant n^{\eta_0}(2N\bar{E}_{r, r'}(S))^{(n-1)\eta_0} \cdot E_{r, r'}(S)$.

(b) *Déterminants d'Interpolation*

Soient $U \in \bar{\mathbf{R}}$, $0 < r' \leqslant r < R$, $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_L)$ des fonctions analytiques dans $B(0, R)^n$ de types $\leqslant \omega$ et M une matrice $L \times L$ à coefficients dans C. On note $m_1, ..., m_L$ les colonnes de M, pour $1 \leqslant \ell \leqslant L$ et $I \subset \{1, ..., L\}$ de cardinal ℓ on note m_i^I le vecteur de C^ℓ déduit de m_i en ne retenant que les composantes d'indices dans I, et on pose

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\ell, I} &= \mathrm{Det}(m_1^I, ..., m_\ell^I) \\ g_{\ell, I}(z) &= \mathrm{Det}(m_1^I, ..., m_{\ell-1}^I, \mathbf{f}(z)^I), \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_\ell \in C^{\binom{L}{\ell}}$ le vecteur de composantes $\mathbf{M}_{\ell, I}$ et

$$|\mathbf{M}_\ell| = \begin{cases} \sum_I |\mathbf{M}_{\ell, I}| & \text{si} \quad \eta_0 = 1 \\ \max_I |\mathbf{M}_{\ell, I}| & \text{si} \quad \eta_0 = 0. \end{cases}$$

Ainsi $g_{\ell, I}$ est une fonction analytique dans $B(0, R)^n$. Soient $S \subset \mathbf{N}^m \times B(0, r')^n$ un ensemble et $S' \subset \mathbf{N} \times B(0, r)$ un ensemble pondéré de cardinal

N, on suppose qu'il existe $x_\ell \in S$, $m'_\ell \in Qm_1 + \cdots + Qm_{\ell-1}$ (où $Q = \mathrm{Frac}(C)$) satisfaisant $|m_\ell + m'_\ell - \mathbf{f}(x_\ell)| \leqslant 2^{-U}$ et pour tout $x' \in S'^n$ qu'il existe $m' \in Qm_1 + \cdots + Qm_{\ell-1}$ satisfaisant $|m' - \mathbf{f}(x')| \leqslant 2^{-U} \cdot (G_{r,r'}(S')^n \times H_{r'}(S))^{-1}$. On reprend enfin les quantités G et E apparaissant dans le principe de Schwarz de la section précédente et attachées à l'ensemble pondéré S'.

Lemme 4. *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus on a*

$$|\mathbf{M}_\ell| \leqslant (2L)^{2\eta_0} \max((2N)^{\eta_0 n}\, 2^{-U}, E \cdot H_{r'}(S) \cdot 2^{\omega(r)}) \cdot |\mathbf{M}_{\ell-1}|,$$

$$|\mathbf{M}_\ell| \leqslant L^{2\eta_0} \cdot |m_\ell| \cdot |\mathbf{M}_{\ell-1}|.$$

Démonstration. Soit $I \subset \{1, ..., L\}$ de cardinal ℓ, on remarque d'abord qu'avec notre hypothèse sur les éléments de S'^n la fonction $g_{\ell,I}$ prend des valeurs inférieures à

$$L^{\eta_0} \cdot 2^{-U} \cdot (G_{r,r'}(S')^n\, H_{r'}(S))^{-1} \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \mathrm{card}\, J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1,J}|$$

sur S'^n. Le principe de Schwarz approché permet d'écrire, lorsqu'on l'applique avec S',

$$\begin{aligned} &M_0(g_{\ell,I}, r') \\ &\quad \leqslant (2L)^{\eta_0} \cdot \max((2N)^{\eta_0 n}\, 2^{-U} \cdot H_{r'}(S)^{-1}, E \cdot 2^{\omega(r)}) \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \mathrm{card}\, J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1,J}|, \end{aligned}$$

car

$$M_0(g_{\ell,I}, r) \leqslant L^{\eta_0} 2^{\omega(r)} \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \mathrm{card}\, J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1,J}|$$

et $G \cdot G_{r,r'}(S')^{-n} = (2N)^{\eta_0 n}$. En substituant $m_\ell + m'_\ell$ à m_ℓ dans $\mathbf{M}_{\ell,I}$ on obtient une matrice $\tilde{\mathbf{M}}_{\ell,I}$ de même déterminant que $\mathbf{M}_{\ell,I}$, développant alors $\tilde{\mathbf{M}}_{\ell,I} - g_{\ell,I}(x_\ell)$ par rapport à la ℓ-ième colonne on trouve que $|\mathbf{M}_{\ell,I}|$ est majoré par

$$M_0(g_{\ell,I}, r') \cdot H_{r'}(S) + L^{\eta_0} \cdot 2^{-U} \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \mathrm{card}\, J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1,J}| \qquad \text{si} \quad \eta_0 = 1$$

$$\max(M_0(g_{\ell,I}, r') \cdot H_{r'}(S), L^{\eta_0} \cdot 2^{-U} \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \mathrm{card}\, J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1,J}|) \qquad \text{si} \quad \eta_0 = 0.$$

On en déduit

$$|\mathbf{M}_{\ell, I}| \leqslant (4L)^{\eta_0} \cdot \max((2N)^{\eta_0 n}\, 2^{-U}, E \cdot 2^{\omega(r)} \cdot H_{r'}(S)) \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \operatorname{card} J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1, J}|.$$

On a aussi la majoration banale

$$|\mathbf{M}_{\ell, I}| \leqslant L^{\eta_0} \cdot |m_\ell| \cdot \max_{\substack{J \subset I \\ \operatorname{card} J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1, J}|$$

en développant $\mathbf{M}_{\ell, I}$ par rapport à la ℓ-ième colonne. Le résultat en découle car dans le cas $\eta_0 = 1$ on a encore

$$\sum_I \max_{\substack{J \subset I \\ \operatorname{card} J = \ell - 1}} |\mathbf{M}_{\ell-1, J}| \leqslant L \sum_J |\mathbf{M}_{\ell-1, J}| = L\, |\mathbf{M}_{\ell-1}|. \quad \blacksquare$$

Le Lemme 4 servira à démontrer le Théorème 1, pour le Théorème 2 nous utiliserons une autre majoration des déterminants d'interpolation. Soient maintenant $x_1, ..., x_L$ des éléments de $S \subset \mathbf{N}^n \times B(0, r')^n$, pour $I, J \subset \{1, ..., L\}$ de même cardinal ℓ on pose

$$g_{I, J}(z) = \operatorname{Det}(\mathbf{f}^I(zx_j))_{j \in J},$$

c'est une fonction d'une variable analytique dans $B(0, R/\max_{1 \leqslant \ell \leqslant L} |x_\ell|)$. Et si $r_1 = r/\max_{1 \leqslant \ell \leqslant L} |x_\ell|$ on a $M_0(g_{I, J}, r_1) \leqslant \ell!^{\eta_0} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant L} M_0(f_j, r)^\ell \cdot (r - \eta_0 r')^{-m(S)\,\ell}$.

Lemme 5. *Avec les notations du début du paragraphe, supposons* $L \geqslant 2^{5n}$ *et qu'il existe un ensemble pondéré* $S \subset \mathbf{N}^n \times B(0, r')^n$ *tel que pour tout* $\ell = 1, ..., L$ *il existe* $x_\ell \in S$ *satisfaisant* $|m_\ell - \mathbf{f}(x_\ell)| \leqslant 2^{-U}$. *Alors, en notant*

$$X = \left(\frac{r'}{r}\right)^{2^{-6} n L^{1/n}} \cdot \max\left(\frac{2^{\omega(r)}}{(r - \eta_0 r')^{m(S)}}, \sqrt{2^{\omega(r)}/(r - \eta_0 r')^{m(S)}}\right)$$

on a

$$|\mathbf{M}_L| \leqslant (2L)^{\eta_0 L} \cdot \max\left(2^{-UL/2} \cdot \prod_{\ell=1}^{L} \max(1, |m_\ell|), X^L\right),$$

$$|\mathbf{M}_L| \leqslant (L!)^{\eta_0} \cdot \prod_{\ell=1}^{L} |m_\ell|.$$

Démonstration. La seconde majoration est banale en développant $|\mathbf{M}_L|$. Pour la première, si $2^{-U} > 1$ elle découle de la seconde, nous supposons dons $2^{-U}\leqslant 1$. Écrivons chaque m_ℓ pour $1\leqslant \ell\leqslant L$ sous la forme $m_\ell=\mathbf{f}(x_\ell)+(m_\ell-\mathbf{f}(x_\ell))$ et développons le déterminant $\mathbf{M}_L$, on obtient

$$\begin{aligned}|\mathbf{M}_L|&\leqslant \sum_{I\subset\{1,\dots,L\}}(L^{\eta_0}2^{-U})^{\operatorname{card}I}\cdot \max_{\substack{J,J'\subset\{1,\dots,L\}\\ \operatorname{card}J'=\operatorname{card}J=L-\operatorname{card}I}}|g_{J,J'}(1)|\\ &\leqslant 2^{\eta_0 L}\cdot \max_{\substack{J,J'\subset\{1,\dots,L\}\\ \operatorname{card}J=\operatorname{card}J'=\ell}}((L^{\eta_0}2^{-U})^{L-\ell}\cdot|g_{J,J'}(1)|).\end{aligned}$$

Soit J, J' de cardinal ℓ réalisant le maximum ci-dessus, on a $|\mathbf{M}_L|\leqslant 2^{\eta_0 L}(L^{\eta_0}2^{-U})^{L-\ell}\cdot|g_{J,J'}(1)|$ et comme $x_j\in S$ est de support dans $B(0,r')^n$ on a, avec $r'_1=r'/\max_{1\leqslant j\leqslant L}|x_j|$ et $r_1=r/\max_{1\leqslant j\leqslant L}|x_j|$,

$$\begin{aligned}|g_{J,J'}(1)|&\leqslant M_0(g_{J,J'},r'_1),\\ M_0(g_{J,J'},r_1)&\leqslant \ell!^{\eta_0}\max_{1\leqslant j\leqslant L}M_0(f_j,r)^\ell\cdot(r-\eta_0 r')^{-m(S)\,\ell}.\end{aligned}$$

On vérifie par des manipulations de lignes que $g_{J,J'}$ est égale au déterminant d'une matrice constituée de lignes de fonctions ayant un ordre $>t'_j$ $(j=1,\dots,\ell)$ à l'origine où t'_j est défini par $\binom{t'_j+n}{n}=j$. La fonction $g_{J,J'}$ a donc un zéro d'ordre $>t_\ell=t'_1+\cdots+t'_\ell$ en l'origine, le principe de Schwarz montre alors

$$\begin{aligned}|g_{J,J'}(1)|&\leqslant M_0(g_{J,J'},r'_1)\\ &\leqslant\left(\frac{r'}{r}\right)^{t_\ell}\cdot M_0(g_{J,J'},r_1)\\ &\leqslant \ell!^{\eta_0}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^{t_\ell}\cdot 2^{\ell\omega(r)}\cdot(r-\eta_0 r')^{-m(S)\,\ell},\end{aligned}$$

car $r'_1/r_1=r'/r$. On vérifie $t'_j\geqslant(n!j)^{1/n}-n$ d'où $t_\ell\geqslant(n^2/e(n+1))\,\ell^{1+1/n}-n\ell$. Écrivant $\mathbf{f}(x_j)=m_j+(\mathbf{f}(x_j)-m_j)$ on montre aussi

$$\begin{aligned}|g_{J,J'}(1)|&\leqslant \ell!^{\eta_0}\cdot\sum_{J_1\subset J}2^{-U(L-\operatorname{card}J_1)}\cdot\prod_{j\in J_1}|m_j|\\ &\leqslant(2\ell)^{\eta_0\ell}\cdot\prod_{j\in J}\max(1,|m_j|),\end{aligned}$$

car $2^{-U}\leqslant 1$. On distingue selon que $\ell<L/2$ ou $\ell\geqslant L/2$, dans le premier cas on écrit $|g_{J,J'}(1)|\leqslant(2\ell)^{\eta_0\ell}\prod_{j\in J}\max(1,|m_j|)$ tandis que dans le second

cas on a $|g_{J,J'}(1)| \leqslant \ell!^{\eta_0} \cdot (r'/r)^{t_\ell} \cdot 2^{\ell\omega(r)}/(r-\eta_0 r')^{m(S)\ell} \leqslant L^{\eta_0\ell} X^L$ car $\ell \geqslant L/2 \geqslant 2^{5n-1}$ et donc $t_\ell \geqslant 2^{-6} n L^{1+1/n}$. On peut donc enfin écrire

$$|\mathbf{M}_L| \leqslant \begin{cases} (2L)^{\eta_0 L} \cdot 2^{-UL/2} \cdot \prod_{j=1}^{L} \max(1, |m_j|) & \text{si} \quad \ell < L/2 \\ (2L)^{\eta_0 L} \cdot X^L & \text{si} \quad \ell \geqslant L/2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Terminons ce paragraphe par un lemme simple qui jouera un rôle important dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Lemme 6. *Soit K une extension finie du corps des fractions K_0 de A, on note $\delta = [K : K_0]_s$. Si pour tout $\sigma \in \mathrm{Plg}(K/K_0)$ on a*

$$X_\sigma \leqslant \max(a_\sigma, b) \qquad et \qquad X_\sigma \leqslant c_\sigma$$

où X_σ, a_σ, b, c_σ sont des quantités réelles positives alors

$$\prod_\sigma X_\sigma \leqslant \max\left(\prod_\sigma a_\sigma, b \cdot \prod_\sigma \max(1, c_\sigma)\right) \leqslant \max\left(\prod_\sigma a_\sigma, b\right) \cdot \prod_\sigma \max(1, c_\sigma).$$

Démonstration. Si pour tout σ on a $a_\sigma \geqslant b$ alors $\prod_\sigma X_\sigma \leqslant \prod_\sigma a_\sigma$. Sinon il existe $\sigma \in \mathrm{Plg}(K/K_0)$ tel que $a_\sigma < b$, on majore X_σ par b et pour les autres plongements on majore $X_{\sigma'}$ par $c_{\sigma'}$. Ainsi $\prod_{\sigma'} X_{\sigma'} \leqslant b \cdot \prod_{\sigma'} \max(1, c_{\sigma'})$, dans ce cas. $\blacksquare$

4. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES

(a) *Démonstration du Théorème* 1

On reprend les notations du Paragraphe 2.b. On a des fonctions $f_1, ..., f_d$ analytiques dans $B(0, R)^n$, une suite $S_1, S_2, \ldots$ de sous-ensembles de $\mathbf{N}^n \times B(0, R)^n$, une suite $S'_1, S'_2, \ldots$ d'ensembles pondérés dans $\mathbf{N} \times B(0, R)$ et une suite $K_1, K_2, \ldots$ d'extensions finies de K. Nous notons $\bar{K}_0$ la clôture algébrique de K_0 dans une clôture algébrique du corps des fractions de C.

Suivant la méthode de M. Laurent, considérons un déterminant d'interpolation de monômes en les fonctions f_i. Plus précisément, on ordonne (arbitrairement) S_i et on munit $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} (\{i\} \times S_i)$ de l'ordre lexicographique suivant

$$(i, x) \precsim (i', x') \Leftrightarrow i < i' \quad \text{ou} \quad (i = i' \text{ et } x \precsim x').$$

On a $\mathcal{D} \subset \mathbf{N}^d$ et supposons la matrice $M_{\mathcal{D}}$ de rang maximal $L = \operatorname{card} \mathcal{D} > \delta(0) \operatorname{card} S_1$, soit $(i_1, x_1) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq (i_L, x_L)$ minimaux pour l'ordre lexicographique sur $(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{i\} \times S_i)^L$ de sorte que pour $\ell = 1, ..., L$ la matrice

$$(\sigma(m_{i_{\ell'}, x_{\ell'}}))_{\ell' = 1, ..., \ell;\, \sigma \in \operatorname{Plg}(K_{i_{\ell'}}/K_0)}$$

soit de rang $\geqslant \ell$. Pour $\ell = 1, ..., L$ on choisit $\sigma_\ell \in \operatorname{Plg}(K_{i_\ell}/K_0)$ tel que la matrice

$$M_\ell = (\sigma_{\ell'}(m_{i_{\ell'}, x_{\ell'}}))_{\ell' = 1, ..., \ell}$$

soit de rang ℓ.

Soit $1 = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_\kappa < \ell_{\kappa+1} = L+1$ la suite d'indices telle que $i_{\ell_{k-1}} = i_{\ell_k - 1} < i_{\ell_k}$ pour $k = 1, ..., \kappa$. Remarquons que $\sigma_{\ell_{k-1}}, ..., \sigma_{\ell_k - 1}$ ont été choisis dans $\operatorname{Plg}(K_{i_{\ell_{k-1}}}/K_0)$ tels que la matrice $M_{\ell_k - 1}$ soit de rang $\ell_k - 1$. Pour tout $\tau = (\tau_1, ..., \tau_\kappa)$ dans le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de la clôture séparable de K_0 dans $\bar{K}_0$ on notera $\mathbf{M}_\ell^\tau$ le vecteur des mineurs de la matrice M_ℓ^τ déduite de M_ℓ en substituant $\tau_{k'}\sigma_{\ell_{k'-1}}, ..., \tau_{k'}\sigma_{\ell_{k'}-1}$ à $\sigma_{\ell_{k'-1}}, ..., \sigma_{\ell_{k'}-1}$ pour $k' < k$ et $\tau_k\sigma_{\ell_{k-1}}, ..., \tau_k\sigma_\ell$ à $\sigma_{\ell_{k-1}}, ..., \sigma_\ell$, respectivement. La matrice $M^\tau_{\ell_k - 1}$ est encore de rang $\ell_k - 1$. En effet, pour $k = 1, ..., \kappa$ le sous-espace de $\bar{K}_0^L$ engendré par les colonnes de la matrice $M_{\ell_k - 1}$ est stable par $\mathcal{G}$. En particulier, pour $\ell = \ell_{k-1}, ..., \ell_k - 1$, tout $\sigma(m_{j,x})$ $(1 \leqslant j < i_{\ell_{k-1}},\ x \in S_j,\ \sigma \in \operatorname{Plg}(K_j/K_0))$ est combinaison linéaire des colonnes de $M^\tau_{\ell-1}$. Pour $j \geqslant 1$ on identifiera chaque élément de $\operatorname{Plg}(K_j/K_0)$ à un élément de $\mathcal{G}$ en fixant un plongement de K_j dans $\bar{K}_0$. Enfin, pour plus de commodité nous posons $j_k = i_{\ell_{k-1}} - 1$.

Soient $\ell \in \{\ell_{k-1}, ..., \ell_k - 1\}$ et $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$, $\tau_{k'} \in \operatorname{Plg}(K_{i_{\ell_{k'}-1}}/K_0)$, d'après le Lemme 4 appliqué aux matrices $M_\ell^\tau \operatorname{Diag}(\lambda_{i_1, x_1, \tau_1\sigma_1} \cdots \lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell})$ avec $S' = S'_{j_k}$, $U = U^{\tau_k\sigma_\ell}(j_k)$, on a

$$\frac{|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell}| \cdot |\mathbf{M}_\ell^\tau|}{|\mathbf{M}^\tau_{\ell-1}|} \leqslant 2^{\Delta_{j_k} - a\eta \log L - \min(\delta(j_k)\, \Omega_k,\ U^{\tau_k\sigma_\ell}(j_k))}$$
$$\frac{|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell}| \cdot |\mathbf{M}_\ell^\tau|}{|\mathbf{M}^\tau_{\ell-1}|} \leqslant 2^{\Delta_{j_k} - a\eta \log L} \cdot |\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell} \cdot \tau_k\sigma_\ell(m_{i_\ell, x_\ell})|$$

où

$$\Omega_k = \frac{-1}{\delta(j_k)} \cdot (\log E(j_k) + \mathcal{D}\omega(r(j_k)))$$

$$\Delta_{j_k} = (a\eta + 2\eta_0) \log(2L) + \eta_0((n-1) \log(2N(j_k)) + \log \max(n, 2N(j_k))).$$

En effet, la condition C_U garantit que les hypothèses du Lemme 4 sont remplies. En prenant le produit sur $\tau_k \in \mathrm{Plg}(K_{i_{\ell_{k-1}}}/K_0)$, il vient

$$\prod_{\tau_k} \frac{|\mathbf{M}_\ell^\tau|}{|\mathbf{M}_{\ell-1}^\tau|} \leqslant 2^{\delta(j_k)(\varDelta_{j_k} - a\eta \log L) - \min(\delta(j_k)\, \Omega_k,\, \sum_{\tau_k} U^{\tau_k \sigma_\ell}(j_k))}$$
$$\times \prod_{\tau_k} \frac{\max(1, |\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell} \cdot \tau_k \sigma_\ell(m_{i_\ell, x_\ell})|)}{|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell}|}$$
$$\leqslant 2^{\delta(j_k)(\varDelta_{j_k} - a\eta \log L + \varrho(j_k) - \min(\Omega_k,\, U(j_k)))}$$

d'après le Lemme 6, appliqué avec

$$\delta = \delta(j_k), \qquad X_\sigma = (|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \sigma\sigma_\ell}| \cdot |\mathbf{M}_\ell^\tau| / |\mathbf{M}_{\ell-1}^\tau|) \cdot 2^{a\eta \log L - \varDelta_{j_k}},$$
$$a_\sigma = 2^{-U^{\sigma\sigma_\ell}(j_k)}, \qquad b = 2^{-\delta(j_k)\, \Omega_k}, \qquad c_\sigma = |\lambda_{i_\ell, x_\ell, \sigma\sigma_\ell} \cdot \sigma\sigma_\ell(m_{i_\ell, x_\ell})|,$$

et les relations

$$\frac{1}{\delta(j_k)} \sum_{\tau_k} U^{\tau_k \sigma_\ell}(j_k) = \frac{1}{\delta(j_k)} \cdot \sum_\sigma U^\sigma(j_k) = U(j_k),$$
$$\prod_{\tau_k} \frac{\max(1, |\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell} \cdot \tau_k \sigma_\ell(m_{i_\ell, x_\ell})|)}{|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \tau_k\sigma_\ell}|} = \prod_\sigma \frac{\max(1, |\lambda_{i_\ell, x_\ell, \sigma} \cdot \sigma(m_{i_\ell, x_\ell})|)}{|\lambda_{i_\ell, x_\ell, \sigma}|}$$
$$\leqslant 2^{\delta(j_k)\, \varrho(j_k)}.$$

Écrivant

$$\prod_\tau \frac{|\mathbf{M}_L^\tau|}{|\mathbf{M}_{\ell_1 - 1}^\tau|} = \prod_{k=2}^{\kappa+1} \prod_{\ell = \ell_{k-1}}^{\ell_k - 1} \prod_\tau \frac{|\mathbf{M}_\ell^\tau|}{|\mathbf{M}_{\ell-1}^\tau|}$$

où les produits sont étendus à $\tau_{k'} \in \mathrm{Plg}(K_{i_{\ell_{k'-1}}}/K_0)$ pour $k' = 1, ..., \kappa$ on déduit des majorations précédentes, en notant $\delta = \delta(j_1) \cdots \delta(j_{\kappa+1})$,

$$\left(\prod_\tau \frac{|\mathbf{M}_L^\tau|}{|\mathbf{M}_{\ell_1-1}^\tau|}\right)^{1/\delta} \leqslant \prod_{k=2}^{\kappa+1} 2^{(\ell_k - \ell_{k-1})(\varDelta_{j_k} - a\eta \log L + \varrho(j_k) - \min(\Omega_k,\, U(j_k)))},$$
$$\left(\prod_\tau |\mathbf{M}_{\ell_1 - 1}^\tau|\right)^{1/\delta} \leqslant (L^{\eta_0} \cdot 2^{\varrho(0)})^{\ell_1 - 1}. \tag{1}$$

On procède maintenant à la majoration arithmétique. Écrivant

$$M = \sum_{\alpha : \{1, ..., L\} \to \mathscr{D}} \pm \prod_{\ell=1}^{L} m_{x_\ell}^{\alpha(\ell)},$$

une estimation pour chaque valeur absolue composant la taille T de A donne la majoration

$$\bar{T}\left(\prod_{\tau} \mathbf{M}_L^{\tau}\right)^{1/\delta} = \bar{T}(\mathbf{M}_L) \leqslant \prod_{k=1}^{\kappa+1} (L^{\eta} \cdot 2^{\phi(j_k)})^{\ell_k - \ell_{k-1}}.$$

Mais $\prod_{\tau} \mathbf{M}_L^{\tau} \in A$, en utilisant l'inégalité de la taille dans A on obtient

$$\left(\prod_{\tau} |\mathbf{M}_L^{\tau}|\right)^{1/\delta} \geqslant \prod_{k=1}^{\kappa+1} (L^{\eta} \cdot 2^{\phi(j_k)})^{-a(\ell_k - \ell_{k-1})},$$

et, en comparant avec la majoration analytique (1), il vient

$$\sum_{k=2}^{\kappa+1} (\ell_k - \ell_{k-1})(\min(\Omega_k, U(j_k)) - a\phi(j_k) - \varrho(j_k) - \Delta_{j_k})$$
$$\leqslant \delta(0) \operatorname{card} S_1(a\phi(0) + \varrho(0) + \Delta_0)$$

car le nombre $\ell_1 - 1$ d'indices ℓ tels que $i_{\ell} = 1$ est majoré par $\delta(0) \operatorname{card} S_1$. Comme $\sum_{k=2}^{\kappa+1} (\ell_k - \ell_{k-1}) = L + 1 - \ell_1 \geqslant L - \delta(0) \operatorname{card} S_1$ on en déduit l'existence d'un indice $k \geqslant 2$ tel que

$$\min(\Omega_k, U(j_k))$$
$$\leqslant a\phi(j_k) + \varrho(j_k) + \Delta_{j_k} + \frac{\delta(0) \operatorname{card} S_1}{L - \delta(0) \operatorname{card} S_1} \cdot (a\phi(0) + \varrho(0) + \Delta_0).$$

Ainsi, si $M_{\mathscr{D}}$ est de rang L on a montré, en posant $j = j_k = i_{\ell_{k-1}} - 1 \geqslant 1$, qu'on ne peut avoir C_1, ceci démontre le Théorème 1.

(b) *Démonstration du Théorème* 2

On reprend les notations du Paragraphe 2.b. On a des fonctions $f_1, ..., f_d$ analytiques dans $B(0, R)^n$, $0 < r' \leqslant r < R$ et un ensemble pondéré S.

Suivant la méthode de M. Laurent, considérons le déterminant d'interpolation suivant. Supposons qu'on ait $\mathscr{D} \subset \mathbf{N}^d$ tel que la matrice $M_{\mathscr{D}}$ soit de rang maximal $L = \operatorname{card} \mathscr{D} > 2^{5n}$, on choisit $x_1, ..., x_L \in S$ tels que

$$\mathbf{M} = \operatorname{Det}(m_{x_{\ell}})_{\ell = 1, ..., L} \neq 0.$$

On commence par majorer $|\sigma(\mathbf{M})|$ pour $\sigma \in \mathrm{Plg}(K/K_0)$ avec $K = K_1$. Les contraintes $C_{r,r'}$ et C'_U permettent d'appliquer le Lemme 5 à la matrice $\sigma(M)\,\mathrm{Diag}(\lambda_{x_1,\sigma} \cdots \lambda_{x_L,\sigma})$ avec U^σ, il vient

$$|\lambda_{x_1,\sigma} \cdots \lambda_{x_L,\sigma}| \cdot |\sigma(\mathbf{M})| \leqslant (2L)^{\eta_0 L} \cdot \max(2^{-U^\sigma/2}, X)^L \times \prod_{\ell=1}^{L} \max(1, |\lambda_{x_\ell,\sigma} \cdot \sigma(m_{x_\ell})|),$$

$$|\lambda_{x_1,\sigma} \cdots \lambda_{x_L,\sigma}| \cdot |\sigma(\mathbf{M})| \leqslant L^{\eta_0 L} \cdot \prod_{\ell=1}^{L} \max(1, |\lambda_{x_\ell,\sigma} \cdot \sigma(m_{x_\ell})|),$$

où $X = (r'/r)^{2^{-6} n L^{1/n}} \cdot \max(2^{\mathscr{D}\omega(r)}/(r-\eta_0 r')^{m(S)}, \sqrt{2^{\mathscr{D}\omega(r)}/(r-\eta_0 r')^{m(S)}})$. Comme X ne dépend pas de σ, on déduit du Lemme 6, avec $\delta = [K : K_0]_s$, $a_\sigma = 2^{-U^\sigma L/2}$, $b = X^L$, $c_\sigma = 1$ et $X_\sigma = |\sigma(\mathbf{M})| \cdot (2L)^{-\eta_0 L} \cdot \prod_{\ell=1}^{L} (|\lambda_{x_\ell,\sigma}| / \max(1, |\lambda_{x_\ell,\sigma} \cdot \sigma(m_{x_\ell})|))$

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Plg}(K/K_0)} |\sigma(\mathbf{M})| \leqslant (2L)^{\eta_0 L\delta} \cdot \max(2^{-U\delta/2}, X)^L \cdot \prod_{\ell=1}^{L} \prod_{\sigma} \frac{\max(1, |\lambda_{x_\ell,\sigma} \cdot \sigma(m_{x_\ell})|)}{|\lambda_{x_\ell,\sigma}|},$$

car $\mathbf{M}$ est défini sur K et $\sum_\sigma U^\sigma = \delta U$. On peut donc énoncer

$$\begin{aligned} |\mathrm{Norme}_{K/K_0}(\mathbf{M})|^{1/[K:K_0]} = \prod_\sigma |\sigma(\mathbf{M})|^{1/\delta} &\leqslant (2L)^{\eta_0 L} \cdot \max(2^{-U/2}, X^{1/\delta})^L \cdot 2^{\varrho L} \\ &\leqslant 2^{L(\Delta - a\eta \log L + \varrho - (1/2)\min(\Upsilon, U))}, \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= (a\eta + \eta_0)\log(2L), \\ \Upsilon &= (-2/\delta)\log X = (2/\delta)(2^{-6} n L^{1/n} \log(r/r') \\ &\qquad - (\gamma/2)(\mathscr{D}\omega(r) - m(S)\log(r - \eta_0 r'))), \end{aligned}$$

$\gamma = 1$ ou 2 selon que $\mathscr{D}\omega(r) \leqslant m(S)\log(r-\eta_0 r')$ ou non, et en utilisant la contrainte C_ϱ.

On procède maintenant à la majoration arithmétique. Écrivant

$$M = \sum_{\alpha : \{1, \ldots, L\} \to \mathscr{D}} \pm \prod_{\ell=1}^{L} m_{x_\ell}^{\alpha(\ell)},$$

une estimation pour chaque valeur absolue composant la taille T de A donne, avec la contrainte C_ϕ, la majoration

$$\bar{T}(\mathrm{Norme}_{K/K_0}(M))^{1/[K:K_0]} \leqslant \bar{T}(M) \leqslant (L!)^\eta \prod_{\ell=1}^{L} \bar{T}(m_{x_\ell}) \leqslant (L^\eta \cdot 2^\phi)^L.$$

En utilisant l'inégalité de la taille dans A on obtient

$$|\mathrm{Norme}_{K/K_0}(M)|^{1/[K:K_0]} \geqslant (L^\eta \cdot 2^\phi)^{-aL},$$

et, en comparant avec la majoration analytique (2), on a

$$\tfrac{1}{2} \cdot \min(\Upsilon, U) \leqslant a\phi + \varrho + \Delta.$$

Ainsi, si $M_{\mathscr{D}}$ est de rang L on a montré qu'on ne peut avoir C_2, ce qui démontre le Théorème 2.

5. PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION

Pour établir la transcendance ou l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques à partir des théorèmes 1 et 2 on procède comme suit (*cf.* Paragraphe 2.c). On recense toutes les fonctions analytiques et l'ensemble pondéré sur lequel ces fonctions prennent des valeurs algébriquement dépendantes des valeurs considérées. Les paramètres primaires n, R, d, et ω sont ainsi fixés. Le choix crucial est l'ensemble $\mathscr{D}$ et la façon dont on parcourt les points, c'est-à-dire la détermination des ensembles S_i. Ce choix effectué fournit les paramètres secondaires r', E, N qu'on complète par r. Pour la transcendance, cela détermine également ϕ, δ, ϱ et on a $U = +\infty$. Pour l'indépendance algébrique, il faut trouver *a priori* les approximations algébriques. Pour ce faire il suffit d'approcher une base de transcendance du corps engendré par les valeurs considérées et à partir de là on raisonne par l'absurde. Lorsque le degré de transcendance de ce corps est supposé égal à 1 (*i.e.* lorsqu'on veut démontrer l'indépendance algébrique d'au moins deux nombres) le principe des tiroirs permet, sous une hypothèse de compacité locale de l'anneau C, de construire des approximations. La généralisation aux degrés de transcendance supérieurs conduit, dans le cas classique $A = \mathbf{Q}$, à plusieurs problèmes intéressants que nous exposons ci-dessous. Enfin, les approximations étant trouvées il faut fixer $\mathscr{D}$ tel que la matrice $M_{\mathscr{D}}$ soit de rang maximal, et on peut pour cela utiliser un lemme de zéros en liaison avec le Théorème 2 ou une estimation asymptotique en liaison avec le Théorème 1.

Si K est un corps de nombres, on note dans la suite Dist, d et t les distances, degré et taille logarithmique des sous-variétés algébriques de $\mathbf{P}_n$, définies sur K (*cf.* [13]). Si Z est un cycle de $\mathbf{P}_n$ irréductible et réduit, défini sur K, de dimension zéro, $d(Z)$ est le nombre de points de Z (comptés avec multiplicités) et, dans les notations du Paragraphe 2 $t(Z)/d(Z) = \log \bar{T}(y) =: t(y)$ pour tout $y \in Z$ et, pour $x \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{Dist}(x, Z)$ est le produit des distances de x aux points de Z. On posera aussi $d(y) := d(Z)$ et pour un point $x \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ et un cycle Z quelconques $\mathrm{dist}(x, Z) = \min_{y \in Z} \mathrm{Dist}(x, y)$, par exemple si Z est réduit à un point y on aura $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{Dist}(x, y)$.

Problème 7. Soient $0 < r \leqslant k$, K un corps de nombres et $x \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ appartenant à une sous-variété algébrique V de $\mathbf{P}_n$ de dimension $k \geqslant 1$, définie sur K. Existe-t-il un réel $c > 0$ et une infinité de cycles Z de dimension $k - r$, définis sur K et satisfaisant

(a) $\log \mathrm{Dist}(x, Z) < -ct(Z)^{(k+1)/r}$?

(b) $\log \mathrm{dist}(x, Z) < -ct(Z)^{(k+1)/r}$?

On remarquera qu'une réponse positive au Problème 7(b) entraîne une réponse positive au Problème 7(a) car $\mathrm{Dist}(x, Z) \leqslant (n+1)^{4d(Z)} \mathrm{dist}(x, Z)$. Le Problème 7(b) est à rapprocher de la conjecture 1.7 de [19], qui demande en plus de séparer de façon particulière taille et degré (*voir* [17] pour une autre façon de séparer taille et degré).

Dans la situation particulière des groupes algébriques commutatifs on peut se demander s'il est possible de construire de meilleures approximations.

Problème 8. Soient $G \subset \mathbf{P}_n$ un groupe algébrique commutatif de dimension g et φ un sous-groupe à un paramètre, définis sur un corps de nombres K. Si $x \in \mathrm{im}\, \varphi$ appartient à une sous-variété algébrique de G de dimension $k \geqslant 1$, définie sur K, $0 < r \leqslant k$, existe-t-il un réel $c > 0$ et une infinité de cycles Z de dimension $k - r$, définis sur K et satisfaisant

$$\log \mathrm{Dist}(x, Z) < -ct(Z)^{g/r}?$$

Le Problème 7(a) a une réponse positive pour $r = 1, 2, 3$, et même sous une forme plus forte. Le Problème 7(b) a une réponse positive pour $k = r = 1$ ou 2 (*voir* Proposition 9 et [17]). On vérifie en général qu'il suffit de traiter le cas $n = k$. En effet, toute sous-variété V de $\mathbf{P}_n$ de dimension k se projette surjectivement sur un sous-espace linéaire de dimension k. Identifiant ce sous-espace linéaire avec $\mathbf{P}_k$ les problèmes 7 ou 8 dans $\mathbf{P}_k$ fournissent des cycles approchant l'image de x dans $\mathbf{P}_k$, les images inverses de ces cycles dans V_n répondent alors au Problème 7 et 8 respectivement dans la sous-variété V de $\mathbf{P}_n$, les "constantes" dépendant du choix de la projection de V sur $\mathbf{P}_k$.

On remarque également que, sous les hypothèses du critère pour l'indépendance algébrique de [13], Théorème 2.11, le Lemme 2.14 de cette référence fournit pour tout H assez grand un cycle Z de dimension zéro, défini sur K, tel que $t(Z) \leqslant c' \cdot H^k$ et $\log \operatorname{Dist}(x, Z) \leqslant -c'^{-1} \cdot H \cdot t(Z)$ où c' ne dépend que de n et V.

PROPOSITION 9. *Sous les hypothèses du Problème 7, il existe un réel $C \geqslant 1$ tel que si $r \in \{1, 2, 3\}$ alors pour tout $H \in \mathbf{N}^*$ il existe un cycle Z_H irréductible, de dimension $k-r$ incomplètement défini sur $\mathbf{Q}$ par des formes de tailles $\leqslant CH$, satisfaisant*

$$\log \operatorname{Dist}(x, Z_H) \leqslant -t(Z_H) \cdot H^{k-r+1}/C.$$

On a en particulier, $t(Z_H) \leqslant (CH)^r$. Si $k = r \in \{1, 2\}$ on a de plus

$$\log \operatorname{dist}(x, Z_H) \leqslant -t(Z_H) \cdot H/C^3.$$

Nota Bene. Nous donnons ici une démonstration élémentaire de cette proposition lorsque $k = r \in \{1, 2\}$ pour la première partie (*resp.* $r = 1$ pour la second partie). La preuve du cas $r = 3$ (*resp.* $k = r = 2$) ainsi qu'un raffinement des estimations fait l'objet de [17].

Démonstration. On suppose sans perte de généralité $n = k$ et on note $c_1, c_2, \ldots$ des réels >0 qui ne dépendent pas de H. Pour $r = 1$, la première partie de l'énoncé résulte facilement du principe des tiroirs. Si $x \in \mathbf{C}^k$, $|x| \leqslant 1$ et H assez grand, il existe un polynôme irréductible $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_k]$ tel que $|P(x)| < ((k+1)^{d^\circ P} M(P))^{-c_1 H^k}$, $d^\circ P < H$ et $H(P) \leqslant (k+1)^{2H}$ ($M(P)$ et $H(P)$ désignent respectivement la mesure de Mahler et la hauteur de P). Le polynôme P définit un cycle $Z = Z_H$ de $\mathbf{P}_k$ rationnel, de dimension $k-1$, de taille $t(Z) = \log M(P) + d^\circ P \leqslant c_2 H$ et satisfaisant $\log \operatorname{Dist}(x, Z) \leqslant \log |P(x)| \leqslant -c_3 t(Z)\, H^k \leqslant -c_4 t(Z)^{k+1}$. D'après la propriété de linéarité des fonctions $\log \operatorname{Dist}(x, \cdot)$ et $t(\cdot)$ on en extrait un cycle irréductible Z_H satisfaisant l'énoncé.

Pour $r = 2$ et pour tout $H \in \mathbf{N}^*$ on construit comme précédemment par le principe des tiroirs un cycle Z_1 irréductible de codimension 1, rationnel, satisfaisant $t(Z_1) \leqslant c_2 H$ et $\log \operatorname{Dist}(x, Z_1) \leqslant -c_3 t(Z_1) \cdot H^k$. Le nombre de formes de tailles $\leqslant H$ deux à deux distinctes modulo l'idéal (principal) de définition de Z_1 est $\geqslant c_5 t(Z_1) \cdot H^k$, on réutilise le principe des tiroirs pour construire un cycle Z_2 de codimension 1, rationnel, satisfaisant $\log \operatorname{Dist}(x, Z_2) \leqslant -c_6 t(Z_1) \cdot H^k$, $t(Z_2) \leqslant c_7 H$ et ne contenant pas Z_1. Le cycle intersection $Z = Z_1 \cdot Z_2$ est de dimension $k-2$, rationnel, satisfaisant $t(Z) \leqslant c_8 t(Z_1)\, t(Z_2) \leqslant c_9 H^2$ et $\log \operatorname{Dist}(x, Z) \leqslant -c_{10} t(Z_1) \cdot H^k \leqslant -c_{11} t(Z) \cdot H^{k-1} \leqslant -c_{12} t(Z)^{(k+1)/2}$ (*cf.* [13], Lemme 2.1 et Corollaire 2.3). Comme précédemment on en extrait un cycle irréductible Z_H satisfaisant l'énoncé.

Reprenons le cas $k=r=1$, et notre réel C, si le cycle $Z=Z_H$ construit précédemment satisfait $\log \operatorname{dist}(x, Z) \geqslant -t(Z)\, H/C^3$ on construit comme dans le cas $r=2$ un cycle Z' de codimension 1 rationnel, satisfaisant $t(Z') \leqslant H/C^{4/3}$, $\log \operatorname{Dist}(x, Z') \leqslant -t(Z)\, H/C^3$ et ne contenant pas Z. On a alors $\operatorname{Dist}(x, Z') \leqslant \operatorname{Dist}(x, Z)$, et comme Z' ne contient pas Z on obtient en intersectant Z et Z' grâce à [13], Proposition 2.5,

$$t(Z)\, H/C \leqslant -\log \operatorname{Dist}(x, Z) \leqslant c_{13} t(Z)\, t(Z') \leqslant c_{13} t(Z)\, H/C^{4/3}$$

en contradiction avec le choix de C assez grand. ∎

La forme sous laquelle nous avons montré la Proposition 9 conduit à poser la variante suivante (plus forte) du Problème 7.

PROBLÈME 10. Sous les hypothèses du Problème 7, existe-t-il des réels c, $C>0$ et pour tout $H \in \mathbf{N}^*$ un cycle Z_H de dimension $k-r$, défini sur $\mathbf{Q}$, satisfaisant $t(Z_H) < (CH)^r$ (ou mieux incomplètement défini sur $\mathbf{Q}$ par des formes de tailles $< CH$) et

(a) $\log \operatorname{Dist}(x, Z_H) < -ct(Z_H) \cdot H^{k-r+1}$?

(b) $\log \operatorname{dist}(x, Z_H) < -ct(Z_H) \cdot H^{k-r+1}$?

On notera que la discussion ci-dessus s'applique non seulement aux corps de nombres mais aussi aux anneaux satisfaisant un principe des tiroirs (*i.e.*, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut couvrir la boule unité de C par un nombre fini, polynomial en $1/\varepsilon$, de boules de rayons ε), *voir* Paragraphe 7.b ci-dessous pour un exemple avec les extension finies de $\mathbf{F}_q((1/T))$.

6. APPLICATIONS À LA TRANSCENDANCE

Nous allons d'abord appliquer le Théorème 1 pour retrouver le Théorème de K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, et G. Philibert [2] sur la transcendance de la valeur de la fonction modulaire invariante J en un point algébrique. Nous montrerons ensuite comment retrouver le Corollaire 3.2 de [9].

Dans les calculs des paramètres secondaires nous utiliserons les notations O et Ω définies par $f(i) = O(g(i))$ (*resp.* $f(i) = \Omega(g(i))$) si et seulement si $\lim_{i \to +\infty}(f(i)/g(i)) < +\infty$ (*resp.* $\lim_{i \to +\infty}(f(i)/g(i)) > 0$). Également, on désignera par $c_1, c_2, \ldots$ des réels pouvant dépendre des paramètres primaires mais pas des choix ni des paramètres secondaires.

(a) *Fonction Modulaire*

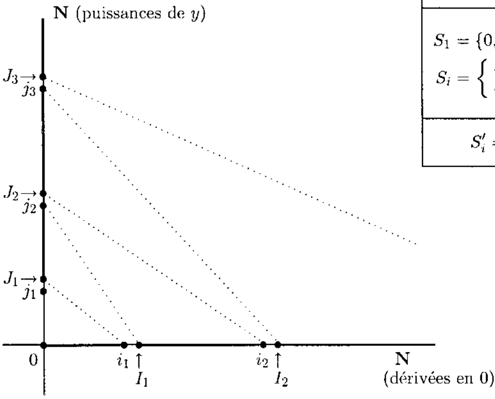
Dans cet exemple, la façon de parcourir les points est originale, on s'inspire de [2]. Tandis que dans tous les corollaires de [14] on a un parcours uniforme, ici deux cas très différents sont décisifs. Rappelons l'énoncé, on considère les fonctions $f_1(z) = z$ et $f_2(z) = zJ(z) := \bar{J}(z)$ où $J(z) = 1/z + 744 + 196884z + 21493760z^2 + \cdots$ est la fonction modulaire invariante (*cf.* [21, Paragraphe 7.3.3]). Les fonctions f_1 et f_2 sont analytiques dans la boule unité $B(0, 1)$ de $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ pour tout premier p. On s'intéresse à la transcendance sur $A = \mathbf{Q}$ des valeurs de ces fonctions.

THÉORÈME 2. *Soit* $y \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ *alors l'un au moins des nombres* y, $J(y)$ *est transcendant sur* $\mathbf{Q}$.

Nous déduisons cet énoncé du Théorème 1 en évitant le recours à un lemme de zéros. D'après l'estimation des coefficients du développement en série de J (*cf.* [2, Lemme 1]), la croissance des fonctions est donnée par $\omega_1(r) = 0$, $\omega_2(r) = c_1 \cdot \eta_0(1 + 1/|\log r|)$. Supposons y et $J(y)$ algébriques sur $\mathbf{Q}$, d'après les relations modulaires satisfaites par la fonction J, il en est de même de y^i et $\bar{J}(y^i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ et bien sûr de toutes les dérivées à l'origine de z et $\bar{J}(z)$. On a donc les paramètres primaires:

Paramètres primaires
$A = \mathbf{Q}$, $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ $a = \eta = 1$, $\eta_0 = 1$ ou 0
$d = 2 > n = 1$
$R = 1$
$\omega_1(r) = 0$, $\omega_2(r) = c_1 . \eta_0 (1 + \frac{1}{\lvert \log r \rvert})$
$S = (\mathbf{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times y^{\mathbf{N}})$

D'après le Lemme 4 de [2] les fonctions f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes ce qui assure que la matrice $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(S)$ est de rang maximal $L = \operatorname{card} \mathscr{D}$. En effet, sinon il existerait une combinaison linéaire non triviale des lignes de $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}(S)$, c'est-à-dire un polynôme non nul en f_1 et f_2 s'annulant sur S et donc ayant en particulier un développement à l'origine identiquement nul. L'ensemble S est composé de deux "branches" radicalement différentes, la seule façon de parcourir un tel ensemble (à moins d'oublier une des branches) est de passer alternativement d'une branche à l'autre en ajoutant plus ou moins de points à chaque fois. Pour décrire un tel parcours on se donne un entier D assez grand et deux suites croissantes d'entiers $[D^2/2] = i_1 < i_2 < \cdots$ et $j_1 < j_2 < \cdots$ et nous posons $I_k = i_k + j_{k+1} - i_1 - j_1 + 2$, $J_k = i_k + j_k - i_1 - j_1 + 2$ pour $k \geqslant 1$.



Choix
$\mathcal{D} = \{h \in \mathbf{N}^2,\ h_1, h_2 < D\}$
$S_1 = \{0, \ldots, i_1\} \times \{0\}$ $S_i = \begin{cases} \{(0, y^{i-J_k+j_k})\} & \text{si } J_k \leq i < I_k \\ \{(i - I_k + i_k, 0)\} & \text{si } I_k \leq i < J_{k+1} \end{cases}$
$S'_i = (\cup_{j=1}^{i} S_j) \cap (\mathbf{N} \times B(0, r'(i)))$

Ainsi, dans un cas on “extrapole” sur les dérivées à l’origine, tandis que dans l’autre on “extrapole” sur les puissances de y. Comme on l’a expliqué au Paragraphe 2.b on prend $U \equiv +\infty$, $\varrho \equiv \phi$ et on calcule les paramètres secondaires ci-dessous ($k \geqslant 1$, $J_1 = 2$). L’estimation de δ et ϕ résulte du Lemme 2 de [2] et le calcul de $E(i)$ est banal. On a $E_{r(i),\, r'(i)}(S'_i) \leqslant (r'(i)/r(i))^{i_k}$, $H_{r'(i)}(S_{i+1}) = 1$ si $J_k \leqslant i < I_k$ et $E_{r(i),\, r'(i)}(S'_i) \leqslant (r'(i)/r(i))^{i - I_k + i_k + j_{k+1} - [\log r'(i)/\log |y|]}$, $H_{r'(i)}(S_{i+1}) = r'(i)^{-i + I_k - i_k}$ si $I_k \leqslant i < J_{k+1}$. Dans ce dernier cas on vérifie aussi $-(i - I_k + i_k) \log r(i) \leqslant 2\sqrt{Di_{k+1}}$ car $D/i_{k+1} \leqslant D/[D^2/2]$ et D est assez grand.

Paramètres secondaires	$J_k \leq i+1 < I_k$	$I_k \leq i+1 < J_{k+1}$
K_{i+1}	$\mathbf{Q}(y, \overline{J}(y^{i-J_k+j_k}))$	$\mathbf{Q}$
$\delta(i)$	$O(j_{k+1} \log\log j_{k+1})$	1
$\phi(i) = \varrho(i)$	$O(Dj_{k+1})$	$O(\sqrt{Di_{k+1}})$
$r'(i)$	$\lvert y\rvert^{\frac{j_k}{2}}$	$\lvert y\rvert^{\frac{j_{k+1}}{2}}$
$r(i)$	$1 - \frac{1}{j_{k+1}}$	$1 - \sqrt{\frac{D}{i_{k+1}}}$
$\mathcal{D}\omega(r(i))$	$O(Dj_{k+1})$	$O(\sqrt{Di_{k+1}})$
$N(i)$	$[D^2/2] + i - 2$	
$-\log E(i)$	$\Omega(i_k j_k)$	$\Omega(j_{k+1}^2 - 2\sqrt{Di_{k+1}})$

On a card $\mathscr{D} = D^2 > [D^2/2] = \delta(0)$ card S_1, $\delta(0) = 1$, $\phi(0) = O(D^{3/2})$, le Théorème 1 affirme que, si y et $J(y)$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}$, il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que

$$-\log E(i) - \mathscr{D}\omega(r(i)) \leqslant \delta(i) \cdot (2\phi(i) + \Delta_i + 2(2\phi(0) + \Delta_0)). \tag{3}$$

Et donc si on vérifie pour $k \geqslant 1$ les conditions

C_1	$i_k j_k > c_2 \cdot \big((D j_{k+1} + D^{3/2}) j_{k+1} \log\log j_{k+1}\big)$ $j_{k+1}^2 > c_3 \cdot \big(\sqrt{D i_{k+1}} + D^{3/2}\big)$

on obtient une contradiction, montrant du même coup que y et $J(y)$ ne peuvent être simultanément algébriques, c'est-à-dire le théorème. Comme D est assez grand, on vérifie effectivement la condition C_1 en prenant pour $k \geqslant 1$, $i_k = [D^{((\beta+1)/\alpha)^{k-1}(3 - 2\beta/(\beta+1-\alpha)) + 2\beta/(\beta+1-\alpha) - 1}]$, $j_k = [D^{((\beta+1)/\alpha)^{k-1}(3/\beta - 2/(\beta+1-\alpha)) + 2/(\beta+1-\alpha)}]$ pour $2 < \alpha < \beta/3 + 1$ et $3 < \beta < 4$. Par exemple, les suites $i_k = [D^{(1/21)(13/6)^{k-1} + 41/21}]$ et $j_k = [D^{(8/21 \cdot 31)(13/6)^{k-1} + 16/21}]$ sont de ce type et conviennent.

(b) *Méthode de Mahler*

Soit K un corps de nombres et $f(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} a_\ell \cdot z^\ell$ une série à coefficients dans K définissant une fonction analytique dans $B(0, R) \subset C$ (avec $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ pour tout nombre premier p). Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite de nombres dans $B(0, R)$, on cherche des conditions sur les α_i pour que les valeurs $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots$ ne soient pas toutes algébriques. On a le résultat suivant (qui est le Corollaire 3.2 de [9]).

THÉORÈME 9. *On suppose que tous les nombres $\alpha_1, f(\alpha_1), \alpha_2, f(\alpha_2), \ldots$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}$ et*

$$\limsup_{i \to +\infty} \frac{[\mathbf{Q}(\alpha_i, f(\alpha_i)) : \mathbf{Q}] \cdot h(1 : \alpha_i : f(\alpha_i))}{-\log |\alpha_i|} < +\infty$$

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{[\mathbf{Q}(\alpha_i, f(\alpha_i)) : \mathbf{Q}]}{-\log |\alpha_i|} = 0,$$

alors la fonction f est algébrique sur $C(z)$.

On applique le Théorème 1, les fonctions sont bien sûr $f_1(z) = z$, $f_2(z) = f(z)$ et les points $S = (\mathbf{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\})$. On choisit un entier t assez grand puis $d = [\sqrt{2t[K : \mathbf{Q}]}] + 1$ et i_0 de sorte que

$-t\log|\alpha_i|$ soit grand par rapport à $[\mathbf{Q}(\alpha_i, f(\alpha_i)) : \mathbf{Q}]\cdot(Dh(1 : a_0 : \cdots : a_{t-1}) + \log t)$ et $D(\max(0, \log R) + \omega_2(R/2))$ pour tout $i \geqslant i_0$. On a les paramètres primaires suivants.

Paramètres primaires
$A = \mathbf{Q}$, $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ $a = \eta = 1$, $\eta_0 = 1$ ou 0
$d = 2 > n = 1$
R
$\omega_1(r) = \max(0, \log r)$, $\omega_2(r)$
$S = (\mathbf{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\})$

Choix
$\mathcal{D} = \{h \in \mathbf{N}^2,\ h_1, h_2 < D\}$
$S_1 = \{0, \ldots, t-1\} \times \{0\}$, $S_i = \{0\} \times \{\alpha_{i+i_0}\}$, $i \geq 2$
$S_i' = S_1$, $i \geq 1$

Et les paramètres secondaires se calculent sans difficulté en utilisant les hypothèses de la proposition.

Paramètres secondaires	$i = 0$	$i \geq 1$
K_{i+1}	K	$\mathbf{Q}(\alpha_{i+i_0}, f(\alpha_{i+i_0}))$
$\delta(i)$	$[K : \mathbf{Q}]$	$[\mathbf{Q}(\alpha_{i+i_0}, f(\alpha_{i+i_0})) : \mathbf{Q}]$
$\phi(i) = \varrho(i)$	$Dh(1 : a_0 : \ldots : a_{t-1})$	$O(\frac{-D\log\lvert\alpha_{i+i_0}\rvert}{\delta(i)})$
$r'(i)$	$R/2$	$\lvert\alpha_{i+i_0}\rvert$
$r(i)$	$R/2$	
$\mathcal{D}\omega(r(i))$	$D(\max(0, \log R) + \omega_2(R/2))$	
$N(i)$	0	t
$-\log E(i)$	0	$-t\log\lvert\alpha_{i+i_0}\rvert$
$U(i)$	$+\infty$	

On a card $\mathscr{D} = D^2 > [D^2/2] \geqslant \delta(0)$ card S_1, le Théorème 1 affirme que si la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est de rang D^2 il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que

$$-\log E(i) - \mathscr{D}\omega(r(i)) \leqslant \delta(i) \cdot (2\phi(i) + \Delta_i + 2(2\phi(0) + \Delta_0)). \tag{4}$$

Et donc si on vérifie pour $i \geqslant 1$ la condition

C_1	$-t \log \lvert\alpha_{i+i_0}\rvert > c_4.\big(-D \log \lvert\alpha_{i+i_0}\rvert + D(\max(0, \log R) + \omega_2(R/2)) +$ $+ [\mathbf{Q}(\alpha_{i+i_0}, f(\alpha_{i+i_0})) : \mathbf{Q}].(Dh(1 : a_0 : \ldots : a_{t-1}) + \log t)\big)$

il suit que $M_{\mathscr{D}}$ est de rang $< D^2$. Mais la condition C_1 résulte bien de nos choix, et la matrice $M_{\mathscr{D}}$ étant de rang $< D^2$ il existe une fonction polynôme $P(z, f(z))$, $P \not\equiv 0$, de degré $< D$ en z et $f(z)$, s'annulant en tous les α_{i+i_0}, qui s'accumulent à l'origine. Cette fonction analytique $P(z, f(z))$ est donc identiquement nulle, c'est une relation de dépendance algébrique de $f(z)$ sur $C(z)$.

7. APPLICATIONS À L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

Nous montrons comment les théorèmes 1 et 2 permettent d'établir des résultats d'indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein (Section a, *voir* [11, 16] pour une étude systématique de ce type de fonctions) et de valeurs de la fonction exponentielle d'un module de Drinfeld (Section b, *voir* aussi [1, 22] pour d'autres résultats de ce type).

Dans les calculs des paramètres secondaires nous utiliserons les notations O et Ω définies par $f(i) = O(g(i))$ (*resp.* $f(i) = \Omega(g(i))$) si et seulement si $\lim_{i \to +\infty}(f(i)/g(i)) < +\infty$ (*resp.* $\lim_{i \to +\infty}(f(i)/g(i)) > 0$). Également, on désignera par $c_1, c_2, \ldots$ des réels pouvant dépendre des paramètres primaires mais pas des choix ni des paramètres secondaires.

(a) *Séries d'Eisenstein*

Considérons pour $k = 1, 2, 3$ les séries d'Eisenstein E_k, dont le développement s'écrit

$$E_k(z) = 1 + \gamma_k \cdot \sum_{i \geqslant 1} \sigma_{2k-1}(i)\, z^i$$

avec $\sigma_k(i) := \sum_{\ell \mid i} \ell^k$, $\gamma_1 = -24$, $\gamma_2 = 240$, $\gamma_3 = -504$. On sait que $\sigma_k(i) \leqslant \zeta(k) \cdot i^k$ pour $k > 1$ (*cf.* [21, Chap. 7, Paragraphe 4.3]). Ainsi $\sigma_1(i) \leqslant \sigma_3(i) \leqslant \sigma_5(i) \leqslant \zeta(5) \cdot i^5$ et les séries ci-dessus définissent des fonctions analytiques dans la boule unité non bordée $B(0,1)$ de C qui désignera ici soit $\mathbf{C}$, soit $\mathbf{C}_p$ pour tout nombre premier p. Nous allons donner une démonstration du résultat suivant qui généralise un théorème dû à G. V. Choodnovsky et s'apparente à la version quantitative qu'en a donné G. Philibert [12].

THÉORÈME 11. *Soit* $y \in B(0,1)\backslash\{0\}$, *alors deux au moins des trois nombres* $E_1(y)$, $E_2(y)$ *et* $E_3(y)$ *sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$. *De plus, il existe un réel* $c>0$ *tel que pour tout cycle* Z *de* $\mathbf{P}_3(C)$ *défini sur* $\mathbf{Q}$, *de dimension* 0 *on a, avec* $x=(1 : E_1(y) : E_2(y) : E_3(y)) \in \mathbf{P}_3(C)$,

$$\log \operatorname{dist}(x, Z) > -c \cdot (t(Z)^{3/2} + (d(Z) \log t(Z))^{3/2}) \cdot (\log t(Z))^{3/2}.$$

Lorsque $y = e^{2i\pi\tau} \in \mathbf{C}$ où τ est le quotient des périodes fondamentales d'une courbes elliptique définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$ on sait que les valeurs $E_1(y)$, $E_2(y)$ et $E_3(y)$ s'expriment algébriquement en fonction des nombres π/ω et η/ω où ω est une période non nulle et η la quasi période associée. Par exemple, si $y=e^{-2\pi} \in \mathbf{C}$ (*resp.* $y=-e^{\pi\sqrt{3}} \in \mathbf{C}$) les séries E_1, E_2 et E_3 prennent des valeurs algébriques sur le corps $\mathbf{Q}(\pi, \Gamma(1/4))$ (*resp.* $\mathbf{Q}(\pi, \Gamma(1/3))$). Dans ce contexte, G. Philibert [12] démontre une mesure d'indépendance algébrique des nombres π/ω et η/ω. Cette mesure se déduit du Théorème 11 en utilisant la propriété d'approximation suivante, qui raffine la Proposition 9: il existe un réel $c_1>0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, $X \subset \mathbf{P}_2$ une courbe définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$ et tout $H \geqslant c_1 \cdot d(X)$ il existe un cycle $Z \subset X(\bar{\mathbf{Q}})$ de dimension 0 satisfaisant $t(Z) \leqslant c \cdot t(X) H$ et $\log \operatorname{dist}(x, Z) \leqslant c_1^{-1} \cdot \max(\log \operatorname{Dist}(x, X), -t(Z)\,H)$. En choisissant $H=[t(X)^{1+\varepsilon/2}]$, $\varepsilon>0$, et en comparant avec la minoration du Théorème 11 on obtient $\log \operatorname{Dist}(x, X) \geqslant -c_2 \cdot t(X)^{3+\varepsilon}$.

Pour établir le Théorème 11 nous allons utiliser le Théorème 1 et la Proposition 9 avec $k=r=1$. Nous ferons appel au lemme de multiplicité suivant, démontré dans [11].

LEMME DE MULTIPLICITÉ. *Il existe un réel* $c>0$ *tel que pour tout entier* D *assez grand et tout polynôme* $P \in C[X_1, X_2, X_3]$ *de degré* $<D$ *on a* $\operatorname{ord}_0 P(E_1, E_2, E_3) < cD^3$.

Reprenons l'analyse des données, on a trois fonctions analytiques d'une variable $f_k(z) = E_k(z)$ pour $k=1, 2, 3$. On a donc $d=3$ et la croissance des fonctions est majorée par $\omega_k(r) = -6\log(1-r)+18$ pour $k=1,2,3$ et $r \in [0,1[$. On vérifie en effet

$$M_0(E_k, r) \leqslant 504\zeta(5) \cdot \sum_{i \geqslant 0} i^5 \cdot r^i \leqslant 2^{18} \cdot \sum_{i \geqslant 0} \binom{i+5}{5} \cdot r^i = 2^{18} \cdot \frac{r}{(1-r)^6}.$$

Les fonctions E_1, E_2, E_3 satisfont le système d'équations différentielles suivant (*voir* [3])

$$12zDE_1(z) = E_1(z)^2 - E_2(z)$$

$$3zDE_2(z) = E_1(z)\,E_2(z) - E_3(z)$$

$$2zDE_3(z) = E_1(z)\,E_3(z) - E_2(z)^2$$

où $D = d/dz$. En particulier, la valeur en y de la t-ième dérivée divisées d'un monôme de degré $<D$ en E_1, E_2, E_3 s'exprime comme y^{-t} multiplié par un polynôme en $E_1(y)$, $E_2(y)$, $E_3(y)$ de degré $D+T$ et de taille $\leqslant c_3 \cdot (D + t\log(D+t))$. Pour construire les approximations il suffit donc d'approcher le point x et pour ce faire on utilise la Proposition 9.

Soient $\varepsilon > 0$ assez petit et $U > c_4(\varepsilon)$, supposons qu'il existe un point $x' \in \mathbf{P}_3(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $t(x')\,d(x') \geqslant c_5(\varepsilon)$ et $\log \mathrm{Dist}(x', x) < -U$. En particulier, si les trois nombres $E_1(y)$, $E_2(y)$, $E_3(y)$ sont algébriques sur un corps de degré de transcendance 1 sur $\mathbf{Q}$ le point x ci-dessus appartient à une courbe de $\mathbf{P}_3(C)$ définie sur $\mathbf{Q}$ et la Proposition 9 avec $k = r = 1$, nous assure de l'existence d'un tel point avec $U \geqslant c_6 \cdot (t(x')\,d(x'))^2$. On en déduit des approximations des $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}((t, y))$ de la forme $\lambda_t \cdot \mu_t$ pour tout $t \in \mathbf{N}$, avec $\lambda_t = y^{-t}$ et μ_t défini sur le corps $\mathbf{Q}(x')$ (de degré $d(x')$ sur $\mathbf{Q}$) et de taille $\leqslant c_7 \cdot ((D+t)\,t(x') + D + t\log(D+t))$.

Nous allons fixer $D > c_8(\varepsilon)$ ultérieurement, posons $T = \varepsilon^{-1} D \log D$ et $T_0 = \max_{d^\circ P < D} \mathrm{ord}_0\, P(E_1, E_2, E_3) \geqslant D^3 - 1$. D'après le lemme de multiplicité on a $T_0 < c \cdot D^3$, on fait le choix de monômes $\mathscr{D} = \{h \in \mathbf{N}^3;\ h_1, h_2, h_3 < D\}$ et l'ensemble S sera $\mathbf{N} \times \{0, y\}$. Comme au Paragraphe 6.a, cet ensemble a deux "branches" et on le parcourt en passant alternativement d'une branche à l'autres, mais le lemme de multiplicité permet de se limiter à un nombre fini d'aller-retour.

Paramètres primaires
$A = \mathbf{Q}$, $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ $a = \eta = 1$, $\eta_0 = 1$ ou 0
$d = 3 > n = 1$
$R = 1$
$\omega_k(r) = -6\log(1-r) + 18$ $k = 1, 2, 3$
$S = \mathbf{N} \times \{0, y\}$

Choix
$\mathcal{D} = \{h \in \mathbf{N}^3,\ h_1, h_2, h_3 < D\}$
$S_i = \begin{cases} \{0, \ldots, [D^3/2]\} \times \{0\} & \text{si } i = 1 \\ \{0, \ldots, T-1\} \times \{y\} & \text{si } i = 2 \\ \{([D^3/2] + i - 2, 0)\} & \text{si } i = 3, \ldots, T_0 - [D^3/2] + 2 \\ \emptyset & \text{si } i \geq T_0 - [D^3/2] + 3 \end{cases}$
$S'_i = \cup_{j=1}^{i} S_j$

En particulier, $\bigcup_{i \geqslant 1} S_i \supset \{0, ..., T_0\} \times \{0\}$ et la matrice $M_{\mathscr{D}}$ est de rang maximal D^3. On calcule les paramètres secondaires, on a $\delta(0) = 1$, $\phi(0) = \varrho(0) = O(D \log D)$ de sorte que card $\mathscr{D} = D^3 > [D^3/2] = \delta(0)$ card S_1, et pour calculer U et E lorsque $2 \leqslant i \leqslant T_0 - [D^3/2] + 2$ on remarque

$$G_{r'(i), r(i)}(S'_i) \leqslant (4(1 + |y|^{-1}))^{i + T + [D^3/2]},$$

$$E_{r'(i), r(i)}(S'_i) = E_{r'(i), r(i)}(y)^T \cdot \left(\frac{r'(i)}{r(i)}\right)^{i + [D^3/2] - 1},$$

$$H_{r'(i)}(S_{i+1}) = r'(i)^{-i - [D^3/2]}.$$

Comme $M_{\mathscr{D}}$ est de rang D^3 le Théorème 1 affirme qu'il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que

$$\min\left(\frac{-\log E(i) - \mathscr{D}\omega(r(i))}{\delta(i)},\ U(i)\right) \leqslant 2\phi(i) + \Delta_i + 2(2\phi(0) + \Delta_0). \qquad (5)$$

Paramètres secondaires	$i = 1$	$2 \leq i \leq T_0 - [D^3/2] + 2$
K_{i+1}	$\mathbf{Q}(x')$	$\mathbf{Q}$
$\delta(i)$	$d(x')$	1
$\phi(i) = \varrho(i)$	$O\big(\varepsilon^{-1}(t(x') + \log D) D \log D\big)$	$O(D \log(D + i))$
$r'(i)$	$\|y\|^{1/2}$	
$r(i)$	$1 - \frac{1}{D}$	$1 - \frac{1}{i + [D^3/2]}$
$\mathcal{D}\omega(r(i))$	$O(D \log D)$	$O(D \log(D + i))$
$N(i)$	$[D^3/2] + 1$	$T + i + [D^3/2] - 1$
$-\log E(i)$	$\Omega(D^3)$	$\Omega(\varepsilon^{-1} D \log D)$
$U(i)$	$\Omega(\frac{U}{d(x')})$	$\Omega(U - c_9.T_0)$

Mais, $T_0 < c \cdot D^3$ et on vérifie les conditions

C_1	$\varepsilon D^3 > c_{10}.d(x')(t(x') + \log D).D \log D$ $\varepsilon U > c_{11}.d(x')(t(x') + \log D) D \log D$ $U > c_{12}.\big(D \log T_0 + T_0\big)$

avec $D = [c_{13} \cdot (\varepsilon^{-1}(t(x') + \log(t(x')\, d(x'))) \cdot d(x') \log(t(x')\, d(x')))^{1/2}]$, dès que $U \geqslant [c_{14} \cdot D^3]$. Et donc, si

$$U \geqslant c_{15} \varepsilon^{-3/2} \cdot (t(x')^{3/2} + (\log(t(x')\, d(x')))^{3/2}) \cdot (d(x') \log(t(x')\, d(x')))^{3/2},$$

on obtient une contradiction qui montre que l'approximation x' de x n'existe pas et en particulier que x n'appartient pas à une courbe de $\mathbf{P}_3$ définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, d'où le théorème.

En ajoutant la fonction z à la situation précédente et en utilisant le lemme de multiplicité correspondant de [11], on obtient

Théorème 12. *Soit $y \in B(0, 1) \backslash \{0\}$, alors trois au moins des quatre nombres y, $E_1(y)$, $E_2(y)$ et $E_3(y)$ sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Ce théorème est démontré dans [11] et [16]. Lorsque $y = \mathrm{e}^{2i\pi\tau} \in \mathbf{C}$ où τ est le quotient des périodes fondamentales d'une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ on en déduit, pour toute période non nulle ω et quasi-période associée η:

Corollaire 13. *Avec les notations ci-dessus les nombres* $\mathrm{e}^{2i\pi\tau}$, π/ω, *et* η/ω *sont algébriquement indépendants. En particulier, les nombres* π, e^{π}, $\Gamma(1/4)$ (*resp.* π, $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{3}}$, $\Gamma(1/3)$) *sont algébriquement indépendants.*

Remarque. Tout comme dans [11, 16] on obtient une mesure d'approximation du point $x = (1 : y : E_1(y) : E_2(y) : E_3(y)) \in \mathbf{P}_4(\mathbf{C})$. Précisément, il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout cycle Z de dimension 0, défini sur $\mathbf{Q}$, on a

$$\log \operatorname{dist}(x, Z) > -c \cdot (t(Z)^{4/3} + (d(Z) \log t(Z))^{4/3}) \cdot (\log t(Z))^{4/3}.$$

Nous allons donner ici une démonstration originale du Théorème 12 utilisant les théorèmes 1 et 11, mais sans faire appel au lemme de multiplicité pour limiter la suite d'ensembles S_i. En particulier, dans le cas du

Corollaire 13 la mesure du Théorème 11 se déduit de [12] et on obtient alors une démonstration de ce corollaire sans point commun avec celle de [11].

On reprend les fonctions $f_k(z) = E_k(z)$, $k = 1, 2, 3$ auxquelles on ajoute $f_4(z) = z$. On fait le choix de monômes $\mathscr{D} = \{h \in \mathbf{N}^4; h_1, ..., h_4 < D\}$ pour un entier D assez grand, et on parcourt alternativement les deux “branches” de cet ensemble comme dans le Paragraphe 6.a (transcendance de valeurs de la fonction modulaire). Soient $1 = I_1 < I_2 < \cdots$ et $D \leqslant T_1, T_2, \ldots$ deux suites d'entiers croissantes que nous allons déterminer.

Paramètres primaires
$A = \mathbf{Q}$, $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ $a = \eta = 1$, $\eta_0 = 1$ ou 0
$d = 4 > n = 1$
$R = 1$
$\omega_k(r) = -6\log(1-r) + 18$ $k = 1, 2, 3$ $\omega_4(r) = 0$
$S = \mathbf{N} \times \{0, y\}$

Choix
$\mathcal{D} = \{h \in \mathbf{N}^4,\ h_1, \ldots, h_4 < D\}$
$S_1 = \{0, \ldots, [D^4/2]\} \times \{0\}$ $S_{i+1} = \begin{cases} \{0, \ldots, T_\ell - 1\} \times \{y\} & \text{si } i = I_\ell \\ \{([D^4/2] + i - \ell, 0)\} & \text{si } I_\ell < i < I_{\ell+1} \end{cases}$
$S'_i = \cup_{j=1}^{i} S_j$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, supposons que le point $x = (1 : E_1(y) : E_2(y) : E_3(y) : y) \in \mathbf{P}_4(C)$ appartienne à une sous-variété de dimension 2 définie sur $\mathbf{Q}$.

D'après le Théorème 11 cela signifie que le corps engendré par les nombres $E_1(y)$, $E_2(y)$ et $E_3(y)$ est de degré de transcendance 2 et que y est algébrique sur ce corps. Soient $E_k(y)$, $E_{k'}(y)$ ($k \neq k' \in \{1, 2, 3\}$) algébriquement indépendants et $x_0 = (1 : E_k(y) : E_{k'}(y)) \in \mathbf{P}_2(C)$. Pour tout $\ell \geqslant 1$ la Proposition 9 avec $k = r = 2$, $H = I_{\ell+1}^{(1+\varepsilon)/3}$ fournit un cycle Z_ℓ de dimension 0 satisfaisant $t(Z_\ell) \leqslant C^2 \cdot I_{\ell+1}^{2(1+\varepsilon)/3}$ et $\log \operatorname{dist}(x_0, Z_\ell) \leqslant -C^{-3} t(Z_\ell) \cdot I_{\ell+1}^{(1+\varepsilon)/3}$. Le Théorème 11 entraîne d'un autre côté $\log \operatorname{dist}(x_0, Z_\ell) > -2c \cdot t(Z_\ell)^{3/2} (\log t(Z_\ell))^3$ et, en comparant la majoration et la minoration, on vérifie $t(Z_\ell) \geqslant c_{16} \cdot I_{\ell+1}^{(2+\varepsilon)/3}$. Le point de Z_ℓ le plus proche de x_0 et les équations de dépendance algébrique de $E_{k''}(y)$ ($k'' \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, k'\}$) et y sur $\mathbf{Q}(E_k(y), E_{k'}(y))$ déterminent un point $x'_\ell \in \mathbf{P}_4(\overline{\mathbf{Q}})$ satisfaisant

$$c_{16} \cdot I_{\ell+1}^{(2+\varepsilon)/3} \leqslant t(x'_\ell)\, d(x'_\ell) \leqslant c_{17} \cdot I_{\ell+1}^{2(1+\varepsilon)/3}$$

$$\log \operatorname{dist}(x, x'_\ell) \leqslant -c_{18} \cdot I_{\ell+1}^{1+(2\varepsilon/3)}.$$

Calculons les paramètres secondaires

Paramètres secondaires	$i = I_\ell$	$I_\ell < i < I_{\ell+1}$
K_{i+1}	$\mathbf{Q}(x'_\ell)$	$\mathbf{Q}$
$\delta(i)$	$d(x'_\ell)$	1
$\phi(i) = \varrho(i)$	$O\Big((t(x'_\ell) + \log T_\ell)T_\ell \log T_\ell\Big)$	$O(D\log(D+i))$
$r'(i)$	$\lvert y\rvert^{1/2}$	
$r(i)$	$1 - \frac{1}{D}$	$1 - \frac{1}{i+[D^4/2]-\ell}$
$\mathcal{D}\omega(r(i))$	$O(D\log D)$	$O(D\log(D+i))$
$N(i)$	$I_\ell + [D^4/2] - \ell$	$T_\ell + i + [D^4/2] - \ell + 1$
$-\log E(i)$	$\Omega(I_\ell + [D^4/2] - c_{19}.T_\ell)$	$\Omega(T_\ell - c_{20}.D\log(D+i))$
$U(i)$	$\Omega\Big(I_{\ell+1}^{1+(2\varepsilon/3)}/d(x'_\ell)\Big)$	$\Omega\Big(I_{\ell+1}^{1+(2\varepsilon/3)} - c_{21}.(T_\ell + D^4)\Big)$

Pour calculer U et E lorsque $I_\ell < i < I_{\ell+1}$ on remarque

$$G_{r'(i),\, r(i)}(S'_i) \leqslant (4(1+|y|^{-1}))^{i+T_\ell+[D^4/2]},$$

$$E_{r'(i),\, r(i)}(S'_i) = E_{r'(i),\, r(i)}(y)^{T_\ell} \cdot \left(\frac{r'(i)}{r(i)}\right)^{i+[D^4/2]-\ell},$$

$$H_{r'(i)}(S_{i+1}) = r'(i)^{-i-[D^4/2]+\ell},$$

tandis que pour $i = I_\ell$, $E_{r'(i),\, r(i)}(S'_i) = (r'(i)/r(i))^{I_\ell+[D^4/2]-\ell}$ et $H_{r'(i)}(S_{i+1}) = (|y|^{1/2} - \eta_0\,|y|)^{-T_\ell}$.

On a $\delta(0) = 1$, $\phi(0) = \varrho(0) = O(D\log D)$ de sorte que card $\mathscr{D} = D^4 > [D^4/2] = \delta(0)\mathrm{card}\, S_1$, comme $M_{\mathscr{D}}$ est de rang D^4 (car les fonctions $f_1, ..., f_4$ sont algébriquement indépendantes) le Théorème 1 affirme qu'il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que

$$\min\left(\frac{-\log E(i) - \mathscr{D}\omega(r(i))}{\delta(i)},\, U(i)\right) \leqslant 2\phi(i) + \Delta_i + 2(2\phi(0) + \Delta_0). \quad (6)$$

On a $d(x'_\ell)(t(x'_\ell)+\log T_\ell)\, T_\ell \log T_\ell \leqslant c_{22}\cdot (I_{\ell+1}^{2/3} T_\ell)^{1+\varepsilon}$, on vérifie pour $\ell \geqslant 1$ les conditions

C_1	$[D^4/2]+I_\ell > c_{23}.(I_{\ell+1}^{2/3}.T_\ell)^{1+\varepsilon}$ $I_{\ell+1}^{1+(2\varepsilon/3)} > c_{24}.(I_{\ell+1}^{2/3}.T_\ell)^{1+\varepsilon}$ $T_\ell > c_{25}.D\log(D+I_{\ell+1})$ $I_{\ell+1}^{1+(2\varepsilon/3)} > c_{26}.(D\log(D+I_{\ell+1})+T_\ell+D^4)$

lorsque $T_\ell = [(I_\ell + D^4)^\alpha]$, $I_{\ell+1} = [(I_\ell + D^4)^\beta]$ avec $\frac{1}{4} < \alpha < 1 - 2\varepsilon/3(1+\varepsilon)$, $1 < \beta < 3(1-\alpha(1+\varepsilon))/2(1+\varepsilon)$. Ainsi, pour ces choix de suites l'inégalité (6) n'est pas satisfaite, on obtient alors une contradiction qui montre que les approximations x'_ℓ de x n'existent pas. En particulier x n'appartient pas à une surface de $\mathbf{P}_4$ définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, d'où le théorème.

(b) *Modules de Drinfeld*

On prend $A = \mathbf{F}_q[T]$, $C = \overline{\mathbf{F}_q((1/T))}$ et on distingue la valeur absolue $|\cdot| = q^{d^\circ}$, qui donne également la taille de A. On a ainsi l'inégalité de la taille $\log |x| \geqslant 0$ pour $x \in A^*$ (*i.e.*, $a = 0$).

On considère un module de Drinfeld de rang ϱ, c'est un A-module Λ discret, contenu dans C et tel que $\operatorname{rg} \Lambda = \varrho$. La fonction exponentielle associée s'écrit

$$\mathrm{e}(z) := z \cdot \prod_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right),$$

c'est une fonction entière de période Λ. L'action de A sur cette fonction s'écrit

$$\mathrm{e}(az) = \Phi_\Lambda(a)(\mathrm{e}(z))$$

où $\Phi_\Lambda \colon A \to C\{\tau\}$ est un homomorphisme d'anneaux. On a $\Phi_\Lambda(a) = a + a_1\tau + \cdots + a_m\tau^m$ avec $a_i \in C$, $a_m \neq 0$, $m = \varrho \cdot d_T^\circ a$, et τ le Frobenius $z \to z^q$. On suppose que ce module de Drinfeld est défini sur une extension finie K du corps des fractions de A (*i.e.*, $a_i \in K$ pour tout $a \in A$). Écrivant $a \in A$ sur les monômes en T, on vérifie $|a_i| \leqslant \mathrm{e}^{c_{27}\cdot |a|^\varrho}$ dans l'expression ci-dessus. Enfin, $R_\Lambda := \{u \in C;\, u\Lambda \subset \Lambda\}$ est un A-module de rang fini $\varrho' \mid \varrho$ auquel Φ_Λ se prolonge. On fixe $w_1, \ldots, w_{r'}$ une famille d'éléments de R_Λ libre sur A. Si $\mathrm{e}(z)$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(T)$ et $u \in R_\Lambda$, on vérifie que $\mathrm{e}(uz)$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(T)$ et $\log \overline{T}(e(uz)) \leqslant |u|^\varrho \cdot (\log \overline{T}(\mathrm{e}(z)) + c_{28})$.

Soient $d \geqslant \ell$, $u_1, \ldots, u_d \in C$ (*resp.* $v_1, \ldots, v_\ell \in C$) linéairement indépendants sur R_A, on s'intéresse au degré de transcendance sur $\mathbf{F}_q(T)$ du corps

$$F := \mathbf{F}_q(T)(\mathrm{e}(u_i v_j); 1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell).$$

Le résultat suivant est nouveau (comparer avec [22]).

THÉORÈME 14. *Dans les notations de ce paragraphe, si $\varrho'\ell d/(\varrho'\ell + \varrho d) \geqslant 2$ alors deux au moins des nombres*

$$\mathrm{e}(u_i v_j);\ (1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell)$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{F}_q(T)$.

On prend $n = 1$ dans les notations du Paragraphe 2.b, on considère les fonctions $f_i(z) = \mathrm{e}(u_i z)$ pour $i = 1, \ldots, d$ et l'ensemble des points $\Gamma = R_A v_1 + \cdots + R_A v_\ell$, on a $\omega(r) = c_{29} \cdot r^\varrho$. Pour $s \in \mathbf{N}$ on note $\Gamma(s)$ l'ensemble pondéré $\{(0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i); a_i \in R_A, |a_i| < s\}$ et $\Gamma = \bigcup_{s \in \mathbf{N}} \Gamma(s)$.

Nous allons utiliser le Théorème 2. Supposons que le corps F soit de degré de transcendance 1 sur $\mathbf{F}_q(T)$, alors, comme dans la preuve de la Proposition 9, le principe des tiroirs permet de trouver une infinité de cycles Z (irréductibles et réduits) définis sur $\mathbf{F}_q(T)$, de dimension zéro et tels que $\log \mathrm{Dist}(\theta, Z) \leqslant -c_{30} \cdot t(Z)^2$ où θ est une base de transcendance de F sur $\mathbf{F}_q(T)$. On notera que la constante dépend du degré de $\mathbf{F}_q((1/T))(\theta)$ sur $\mathbf{F}_q((1/T))$ (*voir* à ce propos la preuve du Lemme 4 de [6]). Fixons un tel Z avec $t(Z) \geqslant c_{31}(\varepsilon)$ pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé, un point x de Z fournit des approximations algébriques des valeurs $\mathrm{e}(u_i v_j)$ et par suite des vecteurs m_v^h approchant $\mathbf{f}^h(v)$ pour $v \in \Gamma(s)$ et $h \in \mathbf{N}^d$. Précisément, x a $d(Z)$ conjugués sur $\mathbf{F}_q(T)$ et donc $[\mathbf{F}_q(T)(x) : \mathbf{F}_q(T)] = d(Z)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_\sigma \frac{\log |\mathbf{f}^h(v) - \sigma(m_v^h)|}{[\mathbf{F}_q(T)(m_v^h) : \mathbf{F}_q(T)]} &\leqslant c_{32} \cdot \frac{\log \mathrm{Dist}(\theta, Z)}{d(Z)} + |h|\, s^\varrho \cdot \frac{t(Z)}{d(Z)} \\ &\leqslant c_{33} \cdot \frac{-t(Z)^2 + |h|\, s^\varrho \cdot t(Z)}{d(Z)}\end{aligned}$$

et $\log \overline{T}(m_v^h) \leqslant c_{34} \cdot |h|\, s^\varrho (t(Z)/d(Z))$. Soit $D \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{D} \subset \{h \in \mathbf{N}^d;\ h_1, \ldots, h_d \leqslant D\}$ de cardinal $L \geqslant \varepsilon D^d$ arbitraire, et considérons l'ensemble $S_1 = \Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell})$ où c_{35} est choisie de sorte qu'avec le lemme de zéros de [24] ou [7] une forme de degré $< D$ en $\mathbf{X}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_q((1/T))(\theta)$ ne s'annule pas sur $\Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell})$. On a les paramètres primaires suivants.

Paramètres primaires
$A = \mathbf{F}_q[T]\ ,\ \ C = \overline{\mathbf{F}_q((1/T))}$ $a = \eta = \eta_0 = 0$
$d > n = 1$
$R = 1$
$\omega_1(r) = \ldots = \omega_d(r) = c_{36}.r^{\varrho}$
$S = \Gamma$

Choix
$\mathcal{D} \subset \{h \in \mathbf{N}^d,\ h_1, \ldots, h_d < D\}$ $\operatorname{card} \mathcal{D} \geq \varepsilon D^d$
$S_1 = \Gamma(c_{35}.D^{d/\varrho'\ell})$

On choisit $D = [(\varepsilon \cdot t(Z))^{\varrho'\ell/(\varrho'\ell + \varrho^d)}]$ et on calcule les paramètres secondaires:

Paramètres secondaires	
$K = K_1$	$\mathbf{F}_q(T)(Z)$ (corps de définition de Z)
δ	$d(Z)$
$\phi = \varrho$	$O(D^{\frac{\varrho'\ell+\varrho d}{\varrho'\ell}}\, t(Z)/d(Z)) = O(\varepsilon t(Z)^2/d(Z))$
r'	$O(D^{\frac{d}{\varrho'\ell}})$
r	$O(D^{\frac{d}{\varrho'\ell}+\varepsilon})$
$\mathcal{D}\omega(r)$	$O(D^{\frac{\varrho'\ell+\varrho d}{\varrho'\ell}+\varrho\varepsilon})$
U	$O(t(Z)^2/d(Z))$

La condition C_2 du Théorème 2 s'énonce $(L \geqslant \varepsilon D^d)$

$$\min(t(Z)^2, \varepsilon^2 D^d \log D - c_{37} \cdot D^{\varrho'\ell + \varrho d/\varrho'\ell + \varrho\varepsilon}) > c_{38}(D^{\varrho'\ell + \varrho d/\varrho'\ell} \cdot t(Z))$$

$$> O(\varepsilon t(Z)^2),$$

et on en déduit

- ou bien $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang maximal L,
- ou bien $\varepsilon^2 D^d \log D \leqslant c_{39} \cdot D^{(\varrho'\ell+\varrho d)/\varrho'\ell} \cdot (t(Z) + D^{\varrho\varepsilon})$.

Avec notre choix de D en fonction de $t(Z)$ la seconde conclusion entraîne, si $t(Z)$ est grand par rapport à ε, $\varrho'\ell d/(\varrho'\ell+\varrho d) < 2$. A contrario, si $\varrho'\ell d/(\varrho'\ell+\varrho d) \geqslant 2$ alors ou bien F est de degré de transcendance au moins 2 sur $\mathbf{F}_q(T)$, ou bien la matrice $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang maximal L. Nous allons exclure cette dernière éventualité, qui vu la liberté sur le choix de $\mathscr{D}$ ne se produit que lorsque $\operatorname{rg}(m_v^h)_{h_1, \ldots h_d \leqslant D,\, v \in \Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell})} < \varepsilon D^d$.

Soit $x \in Z$, si $\operatorname{rg}(m_v^h)_{h_1, \ldots h_d \leqslant D,\, v \in \Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell})} < \varepsilon D^d$ le lemme de Siegel (*cf.* [6]) permet de construire une forme non nulle $p \in \mathbf{F}_q[T][Y, X_1, ..., X_d]$ s'annulant sur $\{x\} \times m_v\,;\, v \in \Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell})$ de degré $\leqslant D$ en $\mathbf{X}$, de degré $\leqslant D^{(\varrho'\ell+\varrho d)/\varrho'\ell}$ en Y et de taille $\leqslant c_{40} \cdot \varepsilon t(Z)$. D'après le lemme de zéro de [24] (*voir* aussi [7]) cette forme ne s'annule pas sur $\{\theta\} \times \mathrm{e}(\Gamma(c_{35} \cdot D^{d/\varrho'\ell}))$ (car θ est transcendant). On obtient donc par image inverse un cycle de dimension zéro de $\mathbf{P}_1(C)$ défini sur $\mathbf{F}_q(T)$ contenant Z de taille $\leqslant c_{41} \cdot \varepsilon t(Z) + D^{(\varrho'\ell+\varrho d)/\varrho'\ell} \leqslant c_{42} \cdot \varepsilon t(Z)$, d'après notre choix de D. Ceci entraîne une contradiction lorsque ε est assez petit. Cette contradiction montre la Proposition 14.

On montre de la même façon que, si $\varrho'\ell(d+1)/(\varrho'\ell+\varrho d) \geqslant 2$ alors deux au moins des nombres

$$v_j,\ \mathrm{e}(u_i v_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell)$$

sont algébriquement indépendants.

Utilisant l'analogue sur $\mathbf{F}_q[T]$ du Problème 7(a) on est amené à choisir $D = [\varepsilon t(Z)^{\varrho'\ell/(\varrho'\ell+\varrho d)k}]$, ce qui, dans la Proposition 14 donne l'indépendance algébrique de $k+1$ nombres dès que $\varrho'\ell d/(\varrho'\ell+\varrho d) \geqslant k+1$. Mais pour exclure l'éventualité $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang maximal, on est amené *a priori* à introduire des hypothèses (techniques cas conjecturallement inutiles) de mesure d'indépendance linéaire des u_i et des v_j. L'argument expliqué ci-dessus permet d'éviter ces hypothèses à condition d'avoir une information supplémentaire sur le cycle Z fournit par le Problème 7(a), à savoir qu'il n'est pas contenu dans une hypersurface de taille en $o(t(Z)^{1/k})$. On comparera cette approche aux travaux antérieurs [5].

Si les u_i sont algébriques, utilisant le Problème 8 on est amené à choisir $D = [\varepsilon t(Z)^{\varrho'\ell(d-k)/(\varrho'\ell+\varrho d)k}]$, ce qui dans la Proposition 14 donne l'indépendance algébrique de $k+1$ nombres dès que $k \leqslant d-1-\varrho d/\varrho'\ell$. En particulier, si $\varrho = \varrho'$ (*i.e.*, le module de Drinfeld est à multiplications complètes) et $d = \ell \geqslant 2$ on trouverait au moins $d-1$ nombres algébriquement indépendants (*voir* Paragraphe 8).

8. APPLICATION SPÉCULATIVE À L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

Ce paragraphe présente une application potentielle de notre méthode reposant sur une réponse positive au Problème 8 du Paragraphe 5. On trouvera peut-être là une motivation pour étudier les problèmes d'approximation.

Dans les calculs des paramètres secondaires nous utiliserons les notations O et Ω définies par $f(i)=O(g(i))$ (*resp.* $f(i)=\Omega(g(i))$) si et seulement si $\lim_{i\to+\infty}(f(i)/g(i))<+\infty$ (*resp.* $\lim_{i\to+\infty}(f(i)/g(i))>0$). Également, on désignera par $c_1, c_2, \ldots$ des réels pouvant dépendre des paramètres primaires mais pas des paramètres secondaires.

On considère le degré de transcendance du sous-corps F de $\mathbf{C}$ engendré sur $\mathbf{Q}$ par les nombres de $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ où α est un nombre algébrique $\neq 0, 1$ et β est un nombre algébrique de degré $d \geqslant 2$ sur $\mathbf{Q}$. On sait déjà [8] que ce degré de transcendance est $\geqslant [(d+1)/2]$.

PROPOSITION 15. *Si le Problème 8 a une réponse pour $G=\mathbf{G}_m^d$ et tout $k=r\leqslant d-1$, alors les $d-1$ nombres $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ où α est un nombre algébrique $\neq 0, 1$ et β est un nombre algébrique de degré $d\geqslant 2$ sur* $\mathbf{Q}$, *sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Les fonctions et les points se présentent naturellement $f_i(z)=\exp(\beta^{i-1}z)$ pour $i=1, \ldots, d$ et $S=\mathbf{N}\times\Gamma$ où $\Gamma=\mathbf{Z}\log\alpha+\mathbf{Z}\beta\log\alpha+\cdots+\mathbf{Z}\beta^{d-1}\log\alpha$. On a les paramètres primaires et on fait le choix $\mathscr{D}=\{h\in\mathbf{N}^d,\ h_1, \ldots, h_d<D\}$ pour un entier D assez grand que nous allons fixer. On considère l'ensemble $S_1=\{0, \ldots, D^{2d/(d+1)}\}\times\Gamma(c_1\cdot D^{(d-1)/(d+1)})$ où c_1 est choisie de sorte qu'une forme de degré $<D$ dans $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ ne s'annule pas sur S_1. D'après le lemme de zéros dans $\mathbf{G}_m^d$ de [15] (par exemple) un tel c_1 existe car $1, \beta, \ldots, \beta^{d-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Paramètres primaires
$A=\mathbf{Q}$, $C=\mathbf{C}$ $a=\eta=\eta_0=1$
$d>n=1$
$R=+\infty$
$\omega_1(r)=\ldots=\omega_d(r)=c_2.r$
$S=\mathbf{N}\times\Gamma$

Choix
$\mathcal{D}=\{h\in\mathbf{N}^d,\ h_1,\ldots,h_d<D\}$
$S_1=\{0,\ldots,D^{\frac{2d}{d+1}}\}\times\Gamma(c_1.D^{\frac{d-1}{d+1}})$

On utilise le Théorème 2 en liaison avec le Problème 8 pour construire les approximations du point $x=(1:\alpha:\cdots:\alpha^{\beta^{d-1}})\in\mathbf{G}_m^d(\mathbf{C})\subset\mathbf{P}_d(\mathbf{C})$.

Supposons que x appartienne à une variété algébrique définie sur $\mathbf{Q}$, de dimension k et fixons un cycle Z satisfaisant le Problème 8 pour $G=\mathbf{G}_m^d$, $g=d$, $\varphi=\mathbf{C}\to\mathbf{C}^{*d}$, $\varphi(z)=(f_1(z), ..., f_d(z))$, $k=r$ et $t(Z)\geqslant c_3(\varepsilon)$ pour un réel $\varepsilon>0$ assez petit. Ce cycle fournit des approximations algébriques des valeurs $f_i(\beta^{j-1}\log\alpha)$ et par suite des vecteurs $m_{(t,v)}^{\mathscr{D}}$ approchant $\mathbf{f}^{\mathscr{D}}((t,v))$ pour tout $(t,v)\in S$ et $\mathscr{D}\subset\mathbf{N}^d$. On choisit $D=[(\varepsilon t(Z)^{(d-k)/k}/\log t(Z))^{(d+1)/2d}]$ et on calcule les paramètres secondaires:

Paramètres secondaires	
$K=K_1$	$\mathbf{Q}(Z)$ (corps de définition de Z)
δ	$d(Z)$
$\phi=\varrho$	$O(D^{\frac{2d}{d+1}}\log D.t(Z)/d(Z))=O(\varepsilon t(Z)^{\frac{d}{k}}/d(Z))$
r'	$O(D^{\frac{d-1}{d+1}})$
r	$O(D^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon})$
$\mathcal{D}\omega(r)$	$O(D^{\frac{2d}{d+1}+\varepsilon})$
U	$O(t(Z)^{\frac{d}{k}}/d(Z))$

La condition C_2 du Théorème 2 s'énonce $(L=D^d)$

$$\begin{aligned}\min(t(Z)^{d/k}, \varepsilon D^d\log D-c_4\cdot D^{2d/(d+1)+\varepsilon})\\ >c_5\cdot(D^{2d/(d+1)}\log D\cdot t(Z))=O(\varepsilon t(Z)^{d/k}),\end{aligned}$$

et on obtient

- ou bien $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang maximal L,
- ou bien $\varepsilon D^d\log D\leqslant c_6\cdot D^{2d/(d+1)}\log D\cdot(t(Z)+D^{\varepsilon})\leqslant c_7\cdot\varepsilon t(Z)^{d/k}$.

Avec notre choix de D en fonction de $t(Z)$ la seconde conclusion entraîne, si $t(Z)$ est grand par rapport à ε, $d<(d/k)\cdot(2d/(d+1))\cdot(k/(d-k))$ c'est-à-dire $k>d-2d/(d+1)$. A contrario, si $k\leqslant d-2d/(d+1)$ (*i.e.*, $k\leqslant d-2$) alors ou bien F est de degré de transcendance au moins $k+1$ sur $\mathbf{Q}$, ou bien la matrice $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang maximal L. Nous allons exclure cette dernière éventualité. On vérifie que le point x ne peut pas être très proche d'un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_m^d$ en fonction du degré de ce sous-groupe.

En effet, un sous-groupe algébrique G de $\mathbf{G}_m^d(\mathbf{C})$ est décrit dans l'espace tangent $\mathbf{C}^d$ par des formes linéaires à coefficients entiers de valeurs absolues $\leqslant \deg G$, le logarithme de x est $(1, \beta, ..., \beta^{d-1}) \cdot \log \alpha$ et l'inégalité de la taille montre $\operatorname{Dist}(x, G) \geqslant c_8 \cdot (\deg G)^{-d}$. Mais, si la matrice $M_{\mathscr{D}}$ n'est pas de rang L le lemme de zéro dans $\mathbf{G}_m^d$ de [15] montre que le cycle Z est contenu dans un tel sous-groupe de degré $\leqslant c_9 \cdot D^d$, or $\operatorname{Dist}(x, Z) \leqslant \exp(-c_{10} \cdot D^{2d^2/(d+1)(d-k)})$ et D est assez grand.

En fait, la démonstration ci-dessus fournit inconditionnellement une mesure d'approximation du point $x = (1 : \alpha : \cdots : \alpha^{\beta^{d-1}}) \in \mathbf{P}_d(\mathbf{C})$. Précisément, si on y prend $D = [c_{11}(\varepsilon^{-1} t(Z))^{(d+1)/d(d-1)}]$ on obtient: il existe un réel $c_{12} > 0$ tel que pour tout cycle $Z \subset \mathbf{P}_d$ de dimension 0, défini sur $\mathbf{Q}$ on ait

$$\log \operatorname{Dist}(x, Z) \geqslant -c_{13} \cdot t(Z)^{1+2/(d-1)} \cdot \log t(Z).$$

On voit comment les conclusions que permettent de tirer de cette mesure les problèmes 7 et 8, diffèrent essentiellement.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. G. Becker, W. D. Brownawell, et R. Tubbs, Gelfond's theorem for Drinfeld modules, *Michigan J. Math.* **41** (1994), 219–233.
2. K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, et G. Philibert, Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin, *Invent. Math.* **124** (1996), 1–9.
3. D. Bertrand, Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique, *in* "Séminaire Delange–Pisot–Poitou," 19ème année, 1977/78, No. 36, 11 p.
4. D. Bertrand, Theta functions and transcendance, *in* "Proc. Madras Number Theory Sympos., Janvier 1996," *Ramanujan J. Math.*, à paraître.
5. S. Delaunay, Grands degrés de transcendance, les hypothèses techniques dans le cas exponentiel I, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **315** (1992), 1333–1336; II, *ibid.* **316** (1993), 7–10.
6. L. Denis, Théorème de Baker et modules de Drinfeld, *J. Number Theory* **43**, No. 2 (1993), 203–215.
7. L. Denis, Lemmes de multiplicités et T-modules, *Michigan J. Math.* **43**, No. 1 (1996), 67–79.
8. G. Diaz, Grands degrés de transcendance pour les familles d'exponentielles, *J. Number Theory* **31**, No. 1 (1989), 1–23.
9. F. Gramain, M. Mignotte, et M. Waldschmidt, Valeurs de fonctions analytiques, *Acta Arith.* **47** (1986), 97–121.
10. M. Laurent, Sur quelques résultats récents de transcendance, *in* "Journées Arithmétiques de Luminy, 17–21 Juillet 1989" (G. Lachaud, Éd.), *Astérisque* **198-199-200** (1991), 209–230.
11. Y. V. Nesterenko, Modular functions and transcendence problems, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **322** (1996), 909–914; *Math. Sb.* **187/9** (1996), 65–96. [Russian]
12. G. Philibert, Une mesure d'indépendance algébrique, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **38** No. 3 (1988), 85–103.

13. P. Philippon, Critères pour l'indépendance algébrique, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **64** (1987), 5–52.
14. P. Philippon, Nouveaux aspects de la transcendance, *in* "Comptes rendus des Journées Arithmétiques de Bordeaux, Septembre 1993," *J. Théorie Nombres Bordeaux* **7**, No. 1 (1995), 191–218.
15. P. Philippon, Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Rocky Mountain J. Math.* **26** No. 3 (1996), 1069–1088.
16. P. Philippon, Indépendance algébrique et *K*-fonctions, *Prépubl. Inst. Math. Jussieu*, No. 71 Mai 1996; *J. Reine Angew. Math.*, à paraître.
17. P. Philippon, Approximations algébriques des points dans les espaces projectifs, soumis à *J. Number Theory*.
18. E. Reyssat, Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielles, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 47–79.
19. D. Roy et M. Waldschmidt, Simultaneous approximation and algebraic independence, *in* "Proc. Madras Number Theory Sympos., Janvier 1996," *Ramanujan J. Math.*, à paraître.
20. W. M. Schmidt, "Diophantine Approximation," Lecture Notes in Math., Vol. 785, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1980.
21. J.-P. Serre, "Cours d'arithmétique," Presses Univ. France, Paris, 1977.
22. R. Tubbs, Algebraic independence and product of Drinfeld modules, *Rocky Mountain J. Math.* **26**, No. 3 (1996), 1165–1181.
23. M. Waldschmidt, Extrapolation et alternants I, *in* "Problèmes Diophantiens 1992-93," Publ. Math., Univ. P. et M. Curie 108, 1994, exposé no. 11.
24. J. Yu, Transcendence in finite characteristic, *in* "The Arithmetic of function fields, Proc. Workshop at Ohio State Univ." (D. Goss, D. Hayes, and M. Rosen, Eds.), pp. 254–264, de Gruyter, Berlin, 1992.